高等学校教学用书

力学

Л. Д. 朗道
E. M. 栗弗席兹 著

高等教育出版社

高等学校教学用書



力　　学

Л. Д. 朗　道
Е. М. 栗弗席兹 著
莫斯科大学物理系四年級中国留学生譯

高等教育出版社



本書是根据苏联国立物理数学書籍出版社(Физматгиз)出版的朗道(Л. Д. Ландау)、栗弗席兹(Е. М. Лифшиц)著“力学”(Механика)1958年版譯出的。原書曾在1940年以朗道、皮亞提哥尔斯基(Л. Пятигорский)的名义出过一版，这次重版之前，由著者改写过，并作为“理論物理教程”(共九卷)的第一卷的單行本重版的。

本書內容論述力学的基本問題——运动方程、守恒定律、剛体运动、正則方程，同时还叙述了碰撞的經典理論及綫性和非綫性系統的弱振动。可供物理、工程物理等系的大学生、研究生及有关方面的科学工作者参考。

本書是莫斯科大学物理系四年級中国留学生作为国庆献礼而集体譯出的，譯稿曾經王懋海、王珊、石長和、金炳年、楊基方等五位同学負責校对。

力　学

Л. Д. 朗　道　Е. М. 栗弗席兹著
莫斯科大学物理系四年級中国留学生合譯
高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号
(北京市書刊出版业营业許可証出字第054号)
上海大东集成联合印刷厂印刷　新华书店发行

統一书号 13010·331　开本 850×1168 1/32　印張 6 14/16
字数 164,000　印数 1—13,000　定价(4)¥0.80
1959年4月第1版　1959年4月上海第1次印刷

序　言

从这本書开始我們打算逐步重版我們的理論物理全部各卷。它的最后計划如下：

1. 力学；

2. 場論；

3. 量子力学(非相对論性理論)；

4. 相对論性量子理論；

5. 統計物理；

6. 流体动力学；

7. 彈性理論；

8. 連續介質的电动力学；

9. 物理运动学。

第一卷的第一版曾于 1940 年由 Л. 朗道和 Л. 別齐哥尔斯基發表出版。虽然本書講述的总計划并沒有改变，但是是經过了重大的修改，并且完全是重新写成的。

我們感謝 И. Е. 强劳申斯基和 Л. П. 彼达也夫斯基在閱讀本書初稿时所給予的幫助。

Л. Д. 朗道，Е. М. 栗弗席兹

莫斯科 1957年 7 月

目　录

第一章 运动方程

§1. 广义坐标

質点[①]的概念是力学最基本概念之一。質点应当理解成这样的物体，当描写它的运动时，可以忽略它的大小。当然，这种忽略与問題的具体条件有关。譬如，当研究行星圍繞太阳的运动时，可以把行星看成質点，然而，在观察它們自轉的时候，就当然不能这样看了。

一个質点在空間的位置由它的向徑 $\boldsymbol{r}$ 所决定，向徑的分量与質点的笛卡尔坐标 x, y, z 相合。$\boldsymbol{r}$ 对时間 t 的微商

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

叫做速度，而二次微商 $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$ 叫做質点的加速度。像一般所通用的那样，以后我們将常常用字母上方的一点表示对时間的微商，例如 $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}$。

为了确定由 N 个質点組成的体系在空間的位置，应該給定 N 个向徑，即 $3N$ 个坐标。一般把为了單值地确定一个体系的位置所必需給出的独立量的数目，叫做这体系的**自由度**的数目。在上述的情况下，这个数目等于 $3N$。这些量不一定是質点的笛卡尔坐标，根据問題的条件，有时选择某一种其他的坐标可能会更加方便。足以描写（具有 s 个自由度的）体系位置的任意 s 个量 $q_1, q_2, \cdots, q_s$，叫做該体系的**广义坐标**，而微商 $\dot{q}_i$ 則是它的**广义速度**。

① 我們以后将經常用"粒子"一詞来代替术語"質点"。

但是，在某种意义上来說，給出广义坐标的数值，还不能决定体系在該时刻的“力学状态”，因为那并不能預言体系在下一个时刻的位置。在給定了坐标数值的情况下，体系可以具有任意速度，而由于速度的不同，体系在下一个时刻（也就是說，經过无穷小的时間間隔 dt 后）的位置也将不一样。

实驗証明，同时給定所有的坐标与速度就能完全确定体系的状态，并且在原則上可以預言它以后的运动。从数学的观点来看，这就是說，給定在某一时刻的坐标和速度也就單值地确定了在該时刻的加速度 $\ddot{q}$[①]。

把加速度和坐标、速度联系起来的关系式叫做**运动方程**。对函数 $q(t)$ 来說，这是一个二阶微分方程，这些方程的积分在原則上可以确定力学体系的运动軌道。

§2. 最小作用量原理

力学体系的运动規律的最一般的形式可以由所謂**最小作用量原理**（或者**哈密頓原理**）給出。根据这一原理，每一力学体系由一定的函数

$$L(q_1, q_2, \cdots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_s, t)$$

［或簡写为 $L(q, \dot{q}, t)$］来描述其特性，而体系的运动满足下面的条件。

假定在 $t=t_1$ 和 $t=t_2$ 的时刻，体系占有两个确定的位置，这两个位置分别由两組坐标值 $q^{(1)}$ 和 $q^{(2)}$ 决定。这时，体系在两个位置之間按照使积分

$$S=\int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt \qquad (2,1)$$

① 为了使符号簡便起見，我們将經常把 q 理解为所有坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_s$ 的集合（同样，把 $\dot{q}$ 看作所有速度的集合）。

有最小可能值[①]的方式运动。函数 L 叫做该体系的**拉格朗日函数**，而积分(2,1)则叫做作用量。

拉格朗日函数仅仅包含 q 和 $\dot{q}$，而不包含更高級的微商 $\ddot{q}$, $\dddot{q}$, …，这一情况說明了力学状态完全由給定的坐标与速度所决定。这正是在前面已經提到过的事实。

現在我們来推导确定积分 (2,1) 最小值的微分方程。为了簡化公式的書写，我們先假定体系只有一个自由度，这样一来，应該决定的只有一个函数 $q(t)$ 了。

假定 $q=q(t)$ 正巧是使 S 有極小值的函数。这就是說，以形如

$$q(t)+\delta q(t) \tag{2,2}$$

的函数代换 $q(t)$ 时，S 就增大，其中，δq 是在从 t_1 到 t_2 整个时間間隔内都很小的函数[它叫做函数 $q(t)$ 的变分]。既然当 $t=t_1$ 和 $t=t_2$ 时，所有用以比較的函数 (2,2) 应該有相同的值 $q^{(1)}$ 和 $q^{(2)}$，因而应該有

$$\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=0。 \tag{2,3}$$

以 $q+\delta q$ 代 q 所引起的 S 的变化由差

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}, t)\,dt-\int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\,dt$$

决定。这个差按 δq 和 $\delta\dot{q}$ (在被积分式子内)指数的展开式是从一級項开始的。这些項的总和等于零是 S 为極小值[②]的必要条件。这总和叫做积分的第一变分(通常簡称为变分)。因此，最小作用量原理可以写成

① 但是，应該指出，这样表述的最小作用量原理对于全部运动軌道整体来說并不是任何时候都是正确的，而只是对于軌道每一个足够小的部分才是正确的。对于全部軌道，积分 (2,1) 可能只有極值而不一定有極小值。但是这一情况在推导运动方程时并无多大关系，因为它仅仅应用了極值条件。

② 一般来說，是为極値。

$$\delta S=\delta\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt=0, \tag{2,4}$$

或者进行变分后，

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right)dt=0。$$

对第二项实行分部积分，并注意到 $\delta\dot{q}=\frac{d}{dt}\delta q$，我們得到

$$\delta S=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\Big|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q\,dt=0。 \tag{2,5}$$

但由于条件(2,3)，式中第一項消失，所以，当 δq 取任意值的时候，剩下的积分应該等于零。这只有在被积分的式子恒等于零的情况下才是可能的。因此，我們得到方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}=0。$$

当具有几个自由度时，在最小作用量原理中应該独立地变分 s 个不同的函数 $q_i(t)$。显然，这时我們将得到 s 个方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \quad (i=1,2,\cdots,s)。 \tag{2,6}$$

这就是要找的微分方程，在力学里它們叫做拉格朗日方程①。假定所給定的力学体系的拉格朗日函数已經知道，則方程(2,6)确定加速度、速度和坐标間的关系，也就是說，它是体系的运动方程。

从数学观点来看，方程(2,6)組成 s 个未知函数 $q_i(t)$ 的 s 个二阶方程的方程組。这个方程組的普遍解包含 $2s$ 个任意常数。为了决定这些常数，从而完全确定力学体系的运动，还必須知道描写体系在某一給定时刻的状态的初始条件，例如知道所有坐标与速度的初值。

假定力学体系由 A 和 B 两部分組成，并且每一部分都是封閉

① 在研究关于决定形如(2,1)的积分的極值的形式問題的变分計算中，这些方程叫做欧勒方程。

的，因而分別有拉格朗日函数 L_A 和 L_B。这时在極限情形下，当两部分离开得很远，以至它們之間的相互作用可以忽略不計时，整个体系的拉格朗日函数趋向極限

$$\lim L = L_A + L_B。 \quad (2,7)$$

拉格朗日函数的可加性本身表明了这样一个事实，即沒有相互作用的諸部分中的任一部分的运动方程不可能包含屬于体系另外部分的量。

显然，将力学体系的拉格朗日函数乘上一个任意常数这种作法本身并不反映在运动方程上。从这里好像可以得出很重要的不确定性，不同的孤立力学体系的拉格朗日函数可以乘上任意不同的常数。可加性消除了这种不确定性，因它只允許对所有体系的拉格朗日函数同时乘上同一个常数，而这不过是归結为选擇这一物理量量度單位的任意。在 § 4 中我們还要回到这一問題上来。

还必須作以下的一般性的提示。我們来研究两个函数 $L'(q, \dot{q}, t)$ 和 $L(q, \dot{q}, t)$，两者相差任意一个坐标与时間的函数 $f(q, t)$ 对时間的全微商：

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t)。 \quad (2,8)$$

利用这二个函数所計算出来的积分(2,1)由关系式

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(q, \dot{q}, t)dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} f(q, t)\, dt =$$
$$= S + f(q^{(2)}, t_2) - f(q^{(1)}, t_1)$$

联系，也就是說，积分 S' 和 S 相差一附加項，这附加項当变分作用量时，是要消失的。因此，条件 $\delta S' = 0$ 与条件 $\delta S = 0$ 一致，从而运动方程的形式并不改变。

可見，确定拉格朗日函数的准确度是到可以加上时間和坐标的任意函数的全微商。

§3. 伽利略相对性原理

为了研究力学現象必須选擇这个或那个計算系統。一般来說，在不同計算系統里运动規律有着不同形式。假如选取一个任意的計算系統，則可能使甚至很簡單的現象的規律在这系統里看起来是很复杂的。自然就产生了寻找这样一种計算系統的課題，在这种計算系統里力学規律要显得特別簡單。

对于任意一个計算系統来講，空間并不是均匀的和各向同性的。这就是說，即使某一物体并不与其他物体相互作用，但它在空間的不同位置和它的不同指向在力学意义上并非等效的。在一般情况下，这也适用于非均匀的时間。卽是說，不同的时刻也不等效。由于空間与时間的这些性質在描写力学現象时所引起的麻煩是显而易見的。例如，自由的(不受外界作用的)物体不可能靜止，卽使在某一时刻物体的速度等于零，但在下一时刻物体就会在某一方向开始运动。

然而，总可以找到这样的計算系統，相对于它来說，空間是均匀的和各向同性的，而时間也是均匀的。这种系統叫做慣性系統。特別应該注意的是：慣性系統里，在某一时刻靜止的自由物体将永远靜止。

关于在慣性計算系統內自由运动着的質点的拉格朗日函数的形式，現在我們可以立刻作出一些結論。空間和时間的均匀性表明，拉格朗日函数既不能显含点的向徑 $\boldsymbol{r}$，也不能显含时間 t，也就是說 L 只能是速度 $\boldsymbol{v}$ 的函数。由于空間的各向同性，拉格朗日函数也不可能与向量 $\boldsymbol{v}$ 的方向有关。因此它仅仅是該向量絕对値的函数，卽速度平方 $\boldsymbol{v}^2=v^2$ 的函数：

$$L=L(v^2)。\tag{3,1}$$

由于拉格朗日函数与 $\boldsymbol{r}$ 无关，我們得到

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}}=0,$$

因此拉格朗日方程有如下形式①：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}=0,$$

由此，$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}$=常数。但由于$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}$只是速度平方的函数，从此得出

$$\boldsymbol{v}=\text{常数}。\tag{3,2}$$

这样一来，我們就得到結論：在慣性計算系統內，一切自由运动都以大小和方向皆不改变的速度进行着。这一結論构成了所謂**慣性定律**的内容。

如果，除了我們已有的慣性計算系統以外，我們还引入另一系統，它相对于前一系統作勻速直綫运动，則相对于这一新系統的自由运动的規律与相对于前一系統的自由运动的規律完全是一样的，卽自由运动仍將等速度地进行。

但是，实驗証明，不仅自由运动的規律在这些系統里是一样的，并且在力学的所有其他方面也是完全等效的。因此，存在着不是一个，而是无穷多个相互間相对作着勻速直綫运动的慣性計算系統。在所有这些系統內，空間与时間的性質是一样的，全部力学規律也是一样的。这一論断构成了力学最重要的原理之一——所謂**伽利略相对性原理**的内容。

上面所講到的一切都十分明显地証明了慣性計算系統性質的特別。由于这些性質的关系，在研究力学現象时，照例应該采用这些系統。以后，在沒有特別作相反的声明时，我們將仅仅研究慣性計算系統。

所有无限多个这种系統的力学完全等效性同时表明，并不存

① 无向量对向量的微商所指的是这样的向量，它的分量等于无向量对于向量的相应分量的微商。

在任何一个比其他系統更优越的"絕对"計算系統。

設有两个不同的計算系統 K 和 K'，其中 K' 相对于 K 以速度 $\boldsymbol{V}$ 运动，同一質点在系統 K 和 K' 里的坐标 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 相互之間由关系式

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{V}t \tag{3,3}$$

联系着。在这里我們認为时間进程在二个計算系統里是一样的，即

$$t=t'。\tag{3,4}$$

关于时間絕对性的假定是經典力学概念的基础①。

公式(3,3)，(3,4)叫做伽利略变換。伽利略相对性原理可以定义为要求力学运动方程相对于这一变換不变。

§4. 自由質点的拉格朗日函数

在确定拉格朗日函数的形式以前，我們首先看一下最簡單的情况——質点相对于慣性計算系統的自由运动。我們在上面已經看到，在这种情况下的拉格朗日函数只可能与速度向量的平方有关。我們利用伽利略相对性原理来考察此函数关系的形式。如果慣性計算系統 K 以无限小的速度 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 相对慣性系統 K' 运动，則 $\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\varepsilon}$。因为运动方程在所有計算系統里应該有同样的形式，所以經过这样的变換，拉格朗日函数 $L(v^2)$ 应該变为函数 L'，如果后者不同于 $L(v^2)$，最多也只能相差一个坐标与时間的函数的全微商(見§2末)。

于是，我們有

$$L'=L(v'^2)=L(v^2+2\boldsymbol{v}\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\varepsilon}^2)。$$

将这一表达式按 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 指数展开成級数，并忽略高級无穷小，我們得到

① 这个假定在相对論力学里是不对的。

$$L(v'^2) = L(v^2) + \frac{\partial L}{\partial v^2} 2\boldsymbol{v}\boldsymbol{\varepsilon}。$$

等式右方的第二項只有在它綫性地依賴于速度 $\boldsymbol{v}$ 的情况下才是时間的全微商。因此 $\frac{\partial L}{\partial v^2}$ 与速度无关，也就是説，在所研究的情况下，拉格朗日函数与速度平方成正比：

$$L = av^2。$$

当进行速度的无限小的变换时，上述形式的拉格朗日函数滿足伽利略相对性原理，从此可以直接得出結論：在計算系統 K 以有限速度 $\boldsymbol{V}$ 相对于 K' 运动的情况下，拉格朗日函数不变。实际上，

$$L' = av'^2 = a(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{V})^2 = av^2 + 2a\boldsymbol{v}\boldsymbol{V} + aV^2$$

或者

$$L' = L + \frac{d}{dt}(2a\boldsymbol{r}\boldsymbol{V} + aV^2t)。$$

第二項是全微商，因此可以丢掉。

常数 a 一般用 $m/2$ 来表示，所以自由运动着的質点的拉格朗日函数最后写成

$$L = \frac{mv^2}{2}。 \qquad (4,1)$$

量 m 叫做質点的質量。由于拉格朗日函数的可加性，对于沒有相互作用的質点所組成的体系，我們有①

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}。 \qquad (4,2)$$

应該强調指出，只有考虑到这一性質时，所給的質量定义才有实在的意义。在 §2 中曾經指出，无論什么时候都可以对拉格朗日函数乘以任意常数，这样作并不在运动方程上反映出来。对于函数(4,2)这样乘就相当于質量量度單位的改变。但是，当單位改

① 我們将以拉丁字母表最前面的几个字母作为給質点編号的指数，而給坐标編号的指数用字母 $i, k, l, \cdots$。

变时，不同粒子的質量間的比例关系并不改变，也正因为如此，粒子的質量才具有实在的物理意义。

很容易看出，質量不可能是負的。事实上，根据最小作用量原理，对于質点从空間的点 1 到点 2 的真实运动，积分

$$S=\int_1^2 \frac{mv^2}{2}\,dt$$

具有極小值。假設質点首先沿着軌道很快离开点 1，然后很快地靠近点 2，如果說質量是負的，則对于这样的軌道，作用量积分可取絕对値任意大的負値，也就是說不可能有極小値①。

値得指出，

$$v^2=\left(\frac{dl}{dt}\right)^2=\frac{dl^2}{dt^2}。\qquad (4,3)$$

因此，为了写出拉格朗日函数，在相应的坐标系里找到弧元長度的平方就足够了。

例如，在笛卡尔坐标中 $dl^2=dx^2+dy^2+dz^2$，因此

$$L=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)。\qquad (4,4)$$

在圓柱坐标中 $dl^2=dr^2+r^2d\varphi^2+dz^2$，由此

$$L=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)。\qquad (4,5)$$

在球形坐标中 $dl^2=dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2$，而

$$L=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)。\qquad (4,6)$$

§5. 質点系的拉格朗日函数

現在我們来研究不与任何外界物体作用，而只互相作用的質点体系。这样的体系叫做**封閉系**。研究發現，給沒有相互作用的

① 在第 8 頁注解①中所作的說明并不妨害这一結論。因为当 $m<0$ 时，不論对于軌道怎样小的区間积分都不可能有極小値。

質点系的拉格朗日函数(4,2)加进一定的(与相互作用的性質有关的)坐标的函数[①]可以描写質点間的相互作用。若用 U 来表示这一坐标函数，我們可写出

$$L=\sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}-U(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \cdots) \qquad (5,1)$$

($\boldsymbol{r}_a$ 是第 a 个質点的向徑)。这就是封閉系的拉格朗日函数的一般形式。

函数 U 叫做質点系的位能，而

$$T=\sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}$$

叫做动能。这些名称的意义将在 §6 中解釋。

位能仅仅与所有各質点在同一时刻的分布有关这一事实表明，它們中一个質点位置的改变立刻就反映在所有其他質点上，所以可以說，相互作用瞬时"傳播"。在經典力学里相互作用的这种性質是不可避免的，这点与經典力学的基本前提——时間的絕对性和伽利略原理有着密切的联系。如果說相互作用的傳播不是瞬时的，也就是說以有限速度傳播的話，則这个速度在不同的(相互相对运动着的)計算系統里是不同的，因为时間的絕对性自然而然地就意味着可以把通常的速度相加法則运用于一切現象。然而，这样一来，有相互作用的物体的运动規律在不同的(慣性)系統里就将不一样了，而这是違反相对性原理的。

在 §3 里我們只講了时間的均匀性。拉格朗日函数(5,1)的形式表明，时間不仅是均匀的，而且是各向同性的，也就是說，它的性質在两个方向上都是一样的。事实上，以 $-t$ 代换 t 并不改变拉格朗日函数，因此运动方程式也不改变。换句話說，假如在系統里有某种运动是可能的，則相反的运动，即以相反程序經过同样这

① 这一論点屬于本書所叙述的經典(非相对論性)力学范圍。

些状态的运动也肯定是可能的。就这个意义而言，按照經典力学定律进行的一切运动都是可逆的。

知道了拉格朗日函数，我們就可以写出运动方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a}=\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a}。 \tag{5,2}$$

将(5,1)代入此式，得到

$$m_a\frac{d\boldsymbol{v}_a}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_a}, \tag{5,3}$$

这种形式的运动方程叫**牛顿方程**，它是描写有相互作用的質点系力学的基础。方程式(5,3)右方的向量

$$\boldsymbol{F}_a=-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_a} \tag{5,4}$$

叫做作用在第 a 个質点上的**力**。它与 U 一样只依赖于全部粒子的坐标，而和它們的速度无关。因此，方程式(5,3)表明粒子的加速度向量只是坐标的函数。

确定位能这个量的准确度是到可以加上任意常数，加上任意常数并不改变运动方程式(这是在 § 2 末所講的拉格朗日函数多値性的特殊情况)。这个常数最自然的和一般通用的选择办法是使得当增大質点間的距离时位能趋向于零。

如果用于描写运动的不是質点的笛卡尔坐标，而是任意广义坐标 q_i，则为了得到拉格朗日函数必须进行相应的变换

$$x_a=f_a(q_1, q_2, \cdots, q_s), \quad \dot{x}_a=\sum_k\frac{\partial f_a}{\partial q_k}\dot{q}_k \text{ 等等。}$$

将这些表示式代入函数

$$L=\frac{1}{2}\sum_a m_a(\dot{x}_a^2+\dot{y}_a^2+\dot{z}_a^2)-U,$$

我們得到如下形式的所要求的拉格朗日函数：

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i,k}a_{ik}(q)\dot{q}_i\dot{q}_k-U(q), \tag{5,5}$$

其中 a_{ik} 只是坐标的函数。在广义坐标里动能仍然是速度的二次

函数，但它也可能依賴于坐标。

到目前为止我們只講了封閉系。現在我們来看一看与另一体系 B 相互作用的非封閉系 A，設体系 B 的运动是已知的。在这种情况下我們就說，系統 A 在給定的（系統 B 所造成的）外場内运动。由于运动方程式是从最小作用量原理，用对每个坐标（即把其余的坐标看作好像是已知的）独立变分的办法导出的，所以我們可以利用整个体系 $A+B$ 的拉格朗日函数 L 来求得体系 A 的拉格朗日函数 L_A，而把其中的坐标 q_B 用已知的时間函数来代替⊖。

假定体系 $A+B$ 是封閉的，則有

$$L=T_A(q_A,\dot{q}_A)+T_B(q_B,\dot{q}_B)-U(q_A,q_B),$$

前二項是体系 A 和 B 的动能，而第三項是它們联合的位能。以已知的时間函数代替 q_B，并去掉只与时間有关（因而它是另外某一时間函数的全微商）的項 $T(q_B(t),\dot{q}_B(t))$，得到

$$L_A=T_A(q_A,\dot{q}_A)-U(q_A,q_B(t))。$$

由此可見，体系在外場中的运动由一般类型的拉格朗日函数所描写，不同点仅仅在于現在的位能可能直接依賴于时間。

因此，在外場中运动的質点的拉格朗日函数的普遍形式是

$$L=\frac{mv^2}{2}-U(\boldsymbol{r},t), \tag{5,6}$$

而运动方程式是

$$m\dot{\boldsymbol{v}}=-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}。 \tag{5,7}$$

如果在場内所有各点，一个粒子都受到同样的作用力 $\boldsymbol{F}$，那末这样的場叫做均勻場。很明显，在这种場里的位能等于

$$U=-\boldsymbol{F}\boldsymbol{r}。 \tag{5,8}$$

在結束本节时，我們对拉格朗日方程式在各种具体問題上的运用作如下的說明。經常不得不碰到这样的力学体系，在这些体

⊖ 因为体系 B 的运动是已知的——譯者注。

系里物体間(質点間)的相互作用有所謂"約束"的性質，卽具有限制物体相互位置的性質。实际上这种約束是通过系住物体的各种棒、綫、鉸鏈等来实現的。这一状况給运动带来了新的因素，卽伴随着物体的运动，在它們相互接触的地方有摩擦。由于这个原因，一般来說，問題就超出了純粹力学的范圍(見 § 25)。但是在很多情况下体系的摩擦是很弱的，以至可以完全忽略它对运动的影响。假如再能忽略体系的"联系物"的質量，則联系物的作用就簡單归結为减少体系的自由度数 s(比較 $3N$ 个自由度而言)。在这种情况下，为了确定运动又可以利用(5, 5)形式的拉格朗日函数，它的独立广义坐标的数目等于实际的自由度数目 ⊖。

習 題

試求下列各种体系位于均匀重力場(重力加速度为 g)中的拉格朗日函数。

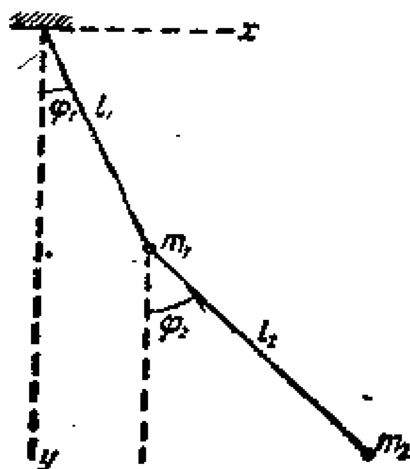


圖 1.

1. 平面双摆(圖 1)。

解：將綫 l_1 和 l_2 与竪直方向之間所成的角 φ_1 和 φ_2 取作坐标。这时对于質点 m_1 我們有

$$T_1=\frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\varphi}_1^2,$$

$$U=-m_1gl_1\cos\varphi_1 .$$

为了求得第二个質点的动能，我們用角 φ_1 和 φ_2 来表示它的笛卡尔坐标 x_2, y_2(坐标的原点在悬点，軸 y 沿竪直方向向下)：

$$x_2=l_1\sin\varphi_1+l_2\sin\varphi_2,\quad y_2=l_1\cos\varphi_1+l_2\cos\varphi_2 。$$

这样，我們得到

$$T_2=\frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2)=\frac{m_2}{2}[l_1^2\dot{\varphi}_1^2+l_2^2\dot{\varphi}_2^2+2l_1l_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2]。$$

最后可得到

⊖ 这里作者所指的"約束"是指所謂"完整約束"(詳見 § 38) —譯者注。

$$L=\frac{m_1+m_2}{2}l_1^2\dot\varphi_1^2+\frac{m_2}{2}l_2^2\dot\varphi_2^2+m_2l_1l_2\dot\varphi_1\dot\varphi_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)+$$

$$+(m_1+m_2)gl_1\cos\varphi_1+m_2gl_2\cos\varphi_2。$$

2．質量为 m_2 的平面摆，它的悬点（質量 m_1）可以沿水平直綫运动（圖 2）。

解： 引入質点 m_1 的坐标 x 和摆的綫与竪直方向之間的夹角 φ，可得到

$$L=\frac{m_1+m_2}{2}\dot x^2+\frac{m_2}{2}(l^2\dot\varphi^2+2l\dot x\dot\varphi\cos\varphi)+m_2gl\cos\varphi。$$

3．平面摆，它的悬挂点有以下各种情况：

（а）沿着竪直的圓周以不变频率 γ 运动（圖 3）；

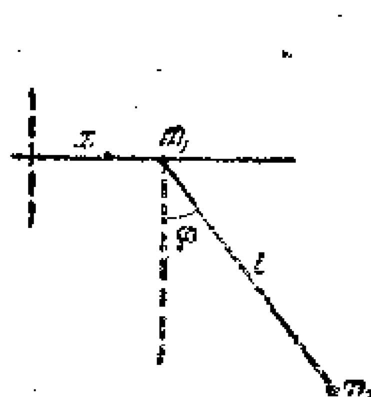


圖　2.

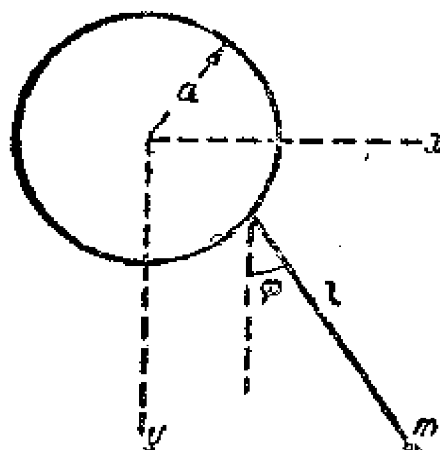


圖　3.

（б）按 $a\cos\gamma t$ 的規律在水平方向振动；

（в）按 $a\cos\gamma t$ 的規律在竪直方向振动。

解：（а）質点 m 的坐标为

$$x=a\cos\gamma t+l\sin\varphi,\quad y=-a\sin\gamma t+l\cos\varphi。$$

拉格朗日函数

$$L=\frac{ml^2}{2}\dot\varphi^2+mla\gamma\dot\varphi\sin(\varphi-\gamma t)+mgl\cos\varphi,$$

在这里没有写入只依賴于时間的諸項，并去掉了 $mal\gamma\cos(\varphi-\gamma t)$ 对时間的全微商。

（б）質点 m 的坐标为

$$x=a\cos\gamma t+l\sin\varphi,\quad y=l\cos\varphi。$$

拉格朗日函数（在去掉全微商以后）

$$L=\frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2+mla\gamma\dot{\varphi}\cos\gamma t\sin\varphi+mgl\cos\varphi,$$

(в)同样，

$$L=\frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2+mla\gamma\dot{\varphi}\cos\gamma t\cos\varphi+mgl\cos\varphi。$$

4. 在圖4上所表示的体系，質点 m_2 沿竪直方向的軸运动，而整个体系以不变的角速度 Ω 繞該軸轉动。

解： 設綫段 a 与竪直方向之間的夹角为 θ，整个体系圍繞轉动軸的轉角为 φ：$\dot{\varphi}=\Omega$。每一个質点 m_1 的位移元 $dl_1^2=a^2d\theta^2+a^2\sin^2\theta d\varphi^2$。質点 m_2 到悬点 A 的距离等于 $2a\cdot\cos\theta$，因此 $dl_2=-2a\sin\theta d\theta$。拉格朗日函数

$$L=m_1a^2(\dot{\theta}^2+\Omega^2\sin^2\theta)+2m_2a^2\sin^2\theta\cdot\dot{\theta}^2+2ga(m_1+m_2)\cos\theta.$$

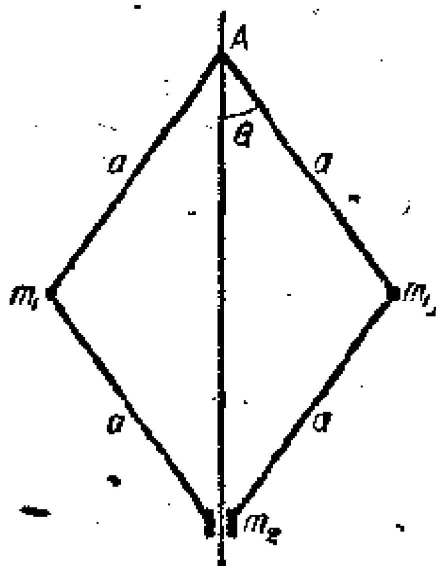


圖 4.

第二章　守恒定律

§6. 能量

力学体系运动时，决定体系状态的 $2s$ 个量 q_i 和 $\dot{q}_i$ $(i=1, 2, \cdots, s)$ 随时間而变化。但是却有这些量的某些函数，在运动时它們保持着只依賴于起始条件的恒定值。这种函数叫做运动积分。

对 s 个自由度的封閉力学体系来講，独立的运动积分数目等于 $2s-1$。由下面的一些簡單的思考就能明了这个問題。运动方程的一般解包含 $2s$ 个任意常数(見第4頁)。由于封閉系的运动方程并不显含时間，所以时間計算起点的选擇便完全是任意的，于是总能把方程的解中某一任意常数选成不随时間而变化的可加常数 t_0 的形式。从 $2s$ 个函数

$$q_i=q_i(t+t_0, C_1, C_2, \cdots, C_{2s-1}),$$
$$\dot{q}_i=\dot{q}_i(t+t_0, C_1, C_2, \cdots, C_{2s-1})$$

中除去 $t+t_0$，我們把 $2s-1$ 个任意常数 $C_1, C_2, \cdots, C_{2s-1}$ 表示成 q 和 $\dot{q}$ 的函数，这些函数也就是运动积分。

但远非所有的运动积分都会在力学中同样起重要的作用。运动积分中有一些积分，它們的不变性有着很深刻的根源，这些根源是与空間和时間的一些基本性質——它們的均匀性和各向同性——相联系着的。所有这些一般所謂的守恒量都具有重要的普遍的可加性，即对于由几部分組成而各部分之間的作用又可忽略的体系，它們的值等于各組成部分的值之和。

即是說，可加性賦于相应的量以特別重要的力学作用。譬如說，假設有两物体在某段时間内相互作用，既然无論是作用前或作

用后，整个体系的每个可加积分都等于两个物体單独存在时它們的值之和，那么，如果已經知道在作用前物体的状态，这些量的守恒定律立即使我們有可能去作一系列关于作用后物体状态的結論。

我們从由于**时間的均匀性**而产生的守恒定律来开始講述。

由于时間的均匀性，封閉系的拉格朗日函数不直接依賴于时間。所以拉格朗日函数对时間的全微商可以写成如下形式：

$$\frac{dL}{dt}=\sum_i\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i+\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i$$

$\left(\right.$如果 L 直接依賴于时間，那么在等式的右边还須加一項 $\left.\frac{\partial L}{\partial t}\right)$。按拉格朗日方程把微商 $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ 换为 $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$，則得到

$$\frac{dL}{dt}=\sum_i\dot{q}_i\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}+\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i=\sum_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)$$

或者

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-L\right)=0。$$

从这里可以看出，

$$\sum_i\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-L=\text{常数} \tag{6,1}$$

在封閉系运动时是不改变的，也就是說，这个量是体系的一个运动积分。这个量称为体系的**能量**。能量是按 (6,1) 通过拉格朗日函数綫性表示的，由拉格朗日函数的可加性可直接得出能量可加性的結論。

能量守恒定律不仅对于封閉系是正确的，而且对于处在不变（也就是說不依賴于时間）的外場之中的体系也是正确的，因在上述推导中，唯一利用过的拉格朗日函数的特性——不直接依賴于时間——在这种情况下也存在。能量守恒的力学体系有时称为**保守系**。

我們在 §5 中已看到，封閉系（或处在不变場中的体系）的拉

格朗日函数具有如下形式:

$$L=T(q,\dot{q})-U(q),$$

其中 T 是速度的二次函数。对这个拉格朗日函数运用齐次函数的欧勒定理,可得到

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=2T。$$

把这个值代入(6,1)式,我們求得

$$E=T(q,\dot{q})+U(q), \tag{6,2}$$

在笛卡尔坐标中

$$E=\sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}+U(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots)。 \tag{6,3}$$

由此可見,体系的能量可以表示成两个本質不同的項,即依賴于速度的动能和仅依賴于粒子坐标的位能之和。

§7. 冲量

另一个守恒定律是由于空間的均匀性而产生的。

由于空間的均匀性,当封閉系作为一个整体在空間平行移动时,它的力学性質不变。依此我們来研究一个无穷小的移动 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 并要求拉格朗日函数不变。

平行移动意味着体系所有的点移动同样長的綫段,也就是說它們的向徑 $\boldsymbol{r}_a\to\boldsymbol{r}_a+\boldsymbol{\varepsilon}$。在速度不变的情况下,由坐标的无穷小的改变而引起的函数 L 的改变是

$$\delta L=\sum_a \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a}\delta \boldsymbol{r}_a=\boldsymbol{\varepsilon}\sum_a \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a},$$

这里是对体系所有質点求和。由于 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 是任意的,所以要求 $\delta L=0$ 就相当于要求

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a}=0, \tag{7,1}$$

由于拉格朗日方程(5,2)，我們由此式得到

$$\sum_a \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a} = \frac{d}{dt}\sum_a \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a} = 0。$$

于是我們得出結論，在封閉力学体系中向量

$$\boldsymbol{P} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a} \tag{7,2}$$

在运动时是不变的。向量 $\boldsymbol{P}$ 称为体系的冲量①。对拉格朗日函数(5,1)微分可得，冲量用質点的速度以下面的形式表示：

$$\boldsymbol{P} = \sum_a m_a \boldsymbol{v}_a。 \tag{7,3}$$

冲量的可加性是很明显的。此外，与能量不同，体系的冲量等于各單个質点冲量

$$\boldsymbol{p}_a = m_a \boldsymbol{v}_a$$

之和是与質点間的相互作用是否可以忽略无关的。

冲量向量的所有三个分量的守恒定律仅在无外場的情况下才成立。但是，当外場存在时，若場中位能不依賴于某一个笛卡尔坐标，冲量的單个分量仍然是可以守恒的。很明显，在沿着該坐标軸移动时，体系的力学性質是不变的，用同样方法我們得到，冲量在这軸上的投影是守恒的。譬如說，在和 z 軸有相同方向的均匀場中冲量沿 x 軸和 y 軸的分量是守恒的。

作为出發点的等式(7,1)本身具有簡單的物理意义。微商 $\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_a}$ 是作用在 a 質点上的力 $\boldsymbol{F}_a$。这样，等式(7,1)就意味着作用在封閉系統內所有質点上的力之和等于零：

$$\sum_a \boldsymbol{F}_a = 0。 \tag{7,4}$$

特别是，当系統总共由两个質点組成时，$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = 0$，即第二質点作用于第一質点的力与第一質点作用于第二質点的力数量相等，但方向相反。这个結論以作用与反作用相等之定律的名称著名。

① 旧的名称是动量。

如果运动由广义坐标 q_i 来描述，那么，拉格朗日函数对广义速度的微商

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\qquad(7,5)$$

称为**广义冲量**，而对广义坐标的微商

$$F_i=\frac{\partial L}{\partial q_i}\qquad(7,6)$$

称为**广义力**。运用这些符号，拉格朗日方程具有如下形式：

$$\dot{p}_i=F_i。\qquad(7,7)$$

在笛卡尔坐标中广义冲量与向量 $\boldsymbol{p}_a$ 的分量相合。一般情况下量 p_i 是广义速度 $\dot{q}_i$ 的綫性齐次函数，并且决不能化为質量和速度的乘积。

習　題

質量为 m，以速度 v_1 运动的質点，从質点的位能等于常量 U_1 的半空間轉移到位能等于常量 U_2 的另一半空間。求質点运动方向的改变。

解： 位能不依賴于平行于二个半空間分界面的軸的坐标。因此質点冲量在这个平面上的投影是守恒的。用 θ_1 和 θ_2 表示界面法綫与質点轉移前后的速度 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 的夹角，我們得到 $v_1\sin\theta_1=v_2\sin\theta_2$。$v_1$ 和 v_2 間的关系，由能量守恒定律給出，結果求得

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\sqrt{1+\frac{2}{mv_1^2}(U_1-U_2)}。$$

§ 8. 慣性中心

封閉力学体系的冲量相对于不同的（慣性）計算系統有不同的值。如果計算系統 K' 以速度 $\boldsymbol{V}$ 相对于計算系統 K 运动，那么运动着的質点相对于这两个系統的速度 $\boldsymbol{v}'_a$ 和 $\boldsymbol{v}_a$ 以关系式 $\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}'_a+\boldsymbol{V}$ 相联系。因此在这两个系統中，冲量的值 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{P}'$ 的关系由公式

$$\boldsymbol{P}=\sum_a m_a\boldsymbol{v}_a=\sum_a m_a\boldsymbol{v}'_a+\boldsymbol{V}\sum_a m_a,$$

或者

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}'+\boldsymbol{V}\sum_a m_a \tag{8,1}$$

給出。

其中值得注意的是，总存在着这样的計算系統 K'，在其中总冲量变为零。使(8,1)中 $\boldsymbol{P}'=0$，求得这个計算系統的速度等于

$$\boldsymbol{V}=\frac{\boldsymbol{P}}{\sum m_a}=\frac{\sum m_a\boldsymbol{v}_a}{\sum m_a}。 \tag{8,2}$$

如果力学体系的总冲量等于零，那么就說这体系对相应的計算系統是静止的。这是單个質点静止的概念的很自然的推广。相应地，公式(8,2)所給出的速度 $\boldsymbol{V}$ 具有冲量不等于零的"体系整体运动"的速度的意义。由此可見，冲量守恒定律使我們有可能很自然地定出力学体系整体的静止和速度的概念。

公式(8,2)指出，体系整体的冲量 $\boldsymbol{P}$ 与速度 $\boldsymbol{V}$ 間的联系同一个質量等于体系中所有質点質量之和 $\mu=\sum m_a$ 的質点一样。这种情况可以簡明地表述为**質量的可加性**的断言。

公式(8,2)的右边可以表示成

$$\boldsymbol{R}=\frac{\sum m_a\boldsymbol{r}_a}{\sum m_a} \tag{8,3}$$

对时間的全微商。可以說，体系整体的速度是向徑由(8,3)所給出的点在空間移动的速度。这个点称为体系的**慣性中心**。

封閉系的冲量守恒定律可以簡述为下面的論断：体系的慣性中心作等速直綫运动。这就是慣性定律的推广，在§3中我們曾对一个自由質点推导出这个定律，一个質点的慣性中心与它本身重合。

在研究封閉系的力学性質时，当然利用力学体系的慣性中心是静止的計算系統。这样就不必观察无关紧要的体系整体的等速直綫运动。

静止力学体系整体的能量通常称为体系的**内能** $E_{\text{вн}}$。内能包括質点在体系中的相对运动的动能和質点之間相互作用的位能。整体以速度 V 运动的体系的总能量可以表成

$$E=\frac{\mu V^2}{2}+E_{\text{вн}}。\tag{8,4}$$

虽然此公式本身十分明显，但我們还是来直接推导它。

力学体系在两个計算系統 K 和 K' 中的能量 E 和 E' 由以下关系联系：

$$E=\frac{1}{2}\sum_a m_a v_a^2+U=\frac{1}{2}\sum_a m_a(\boldsymbol{v}'_a+\boldsymbol{V})^2+U=$$

$$=\frac{\mu V^2}{2}+\boldsymbol{V}\sum_a m_a\boldsymbol{v}'_a+\sum_a\frac{m_a v'^2_a}{2}+U$$

或者

$$E=E'+\boldsymbol{V}\boldsymbol{P}'+\frac{\mu V^2}{2}。\tag{8,5}$$

从一个計算系統轉到另一个計算系統时，这个公式决定能量的变换規律，正像公式(8,1)給出冲量的変換規律一样。如果在系統 K' 中惯性中心静止，那么 $\boldsymbol{P}'=0$，$E'=E_{\text{вн}}$，于是我們又得到了公式(8,4)。

§9. 冲量矩

現在我們来推导由于空間的**各向同性**而产生的守恒定律。

空間各向同性就意味着，当封閉体系整体在空間任意轉动时，該体系的力学性質不变。与此相应，我們来研究体系的一个无穷小的轉动，并要求它的拉格朗日函数在这情况下不变。

引入无穷小轉动向量 $\delta\boldsymbol{\varphi}$，其絕对值等于轉动角 $\delta\varphi$，而方向与轉动軸符合（而且相对于 $\delta\boldsymbol{\varphi}$ 的方向而言，轉动的方向应符合螺旋法則）。

首先，我們找出当这种轉动时从共同的坐标原点(位于轉动軸上)引向轉动体系的任一質点的向徑的增量等于什么。向徑端点的綫移动与角度的关系是

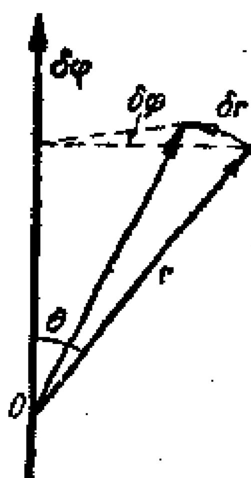


圖 5.

$$|\delta \boldsymbol{r}| = r \sin\theta \cdot \delta\varphi$$

(圖 5)。而向量 $\delta\boldsymbol{r}$ 的方向垂直于通过 $\boldsymbol{r}$ 与 $\delta\boldsymbol{\varphi}$ 的平面。所以很明显，

$$\delta\boldsymbol{r} = [\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{r}]。\qquad (9,1)$$

当体系轉动时，不仅向徑的方向改变，所有質点的速度也要改变，而且所有向量按同一規律改变。所以相对于静止坐标系，速度的增量

$$\delta\boldsymbol{v} = [\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{v}]。\qquad (9,2)$$

把这些式子代入轉动时拉格朗日函数不变的条件

$$\delta L = \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a}\delta\boldsymbol{r}_a + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a}\delta\boldsymbol{v}_a\right) = 0$$

中，按定义，微商 $\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a}$ 可用 $\boldsymbol{p}_a$ 代替，而根据拉格朗日方程，$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a}$ 可用 $\dot{\boldsymbol{p}}_a$ 代替。于是我們得到

$$\sum_a (\dot{\boldsymbol{P}}_a[\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{r}_a] + \boldsymbol{p}_a[\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{v}_a]) = 0,$$

对乘积进行循环調动并把 $\delta\varphi$ 弄到求合記号之外可得

$$\delta\boldsymbol{\varphi}\sum_a([\boldsymbol{r}_a\dot{\boldsymbol{p}}_a] + [\boldsymbol{v}_a\boldsymbol{p}_a]) = \delta\boldsymbol{\varphi}\frac{d}{dt}\sum_a[\boldsymbol{r}_a\boldsymbol{p}_a] = 0。$$

由于 $\delta\boldsymbol{\varphi}$ 的任意性，因此

$$\frac{d}{dt}\sum_a[\boldsymbol{r}_a\boldsymbol{p}_a] = 0,$$

也就是說我們得到了下面的結論：当封閉系运动时，向量

$$\boldsymbol{M} = \sum_a[\boldsymbol{r}_a\boldsymbol{p}_a] \qquad (9,3)$$

守恒，此向量称为体系的冲量矩(或簡称矩)[①]。这个量的可加性

① 也采用轉动矩或角矩的名称。

是显而易見的，并且像冲量一样，它也与質点之間是否存在着相互作用无关。

可加的运动积分就仅限于这些。因此，任何封閉系一共有七个可加积分：能量以及冲量向量和矩向量在三个方向上的分量。

旣然在矩的定义里含有質点的向徑，所以一般說来其值依賴于坐标原点的选擇。相对于两个距离为 a 的原点，同一点的向徑 $\boldsymbol{r}_a$ 和 $\boldsymbol{r}'_a$ 之間的关系是 $\boldsymbol{r}_a=\boldsymbol{r}'_a+\boldsymbol{a}$。所以有

$$\boldsymbol{M}=\sum_a[\boldsymbol{r}_a\boldsymbol{p}_a]=[\boldsymbol{a}\sum_a\boldsymbol{p}_a]+\sum_a[\boldsymbol{r}'_a\boldsymbol{p}_a]$$

或者

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}'+[\boldsymbol{a}\boldsymbol{P}]。\tag{9,4}$$

从这公式看得出，只有当体系整体靜止时（也就是說 $\boldsymbol{P}=0$ 时），它的矩才不依賴于坐标原点的选擇。当然，矩之値虽不确定，但并不影响到矩守恒定律，因为封閉系的冲量也是守恒的。

我們来推导联系在两个不同的慣性系統 K 和 K' 中冲量矩之値的公式，这两个系統中的第二个相对于第一个以速度 $\boldsymbol{V}$ 运动。我們認为在某时刻系統 K 和 K' 的坐标原点是重合的。此时質点的向徑在两个系統中也是一样的，而速度以 $\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}'_a+\boldsymbol{V}$ 相联系。所以有

$$\boldsymbol{M}=\sum_a m_a[\boldsymbol{r}_a\boldsymbol{v}_a]=\sum_a m_a[\boldsymbol{r}_a\boldsymbol{v}'_a]+\sum_a m_a[\boldsymbol{r}_a\boldsymbol{V}]。$$

等式右边的第一个和是在系統 K' 里的矩 $\boldsymbol{M}'$，在第二个和中，根据(8,3)引入慣性中心的向徑，我們得到

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}'+\mu[\boldsymbol{R}\boldsymbol{V}]。\tag{9,5}$$

这个公式决定当由一个計算系統轉移到另一个計算系統时冲量矩的轉換規律，就像公式(8,1)和(8,5)給出冲量和能量的轉換規律一样。

若力学体系整体在 K' 中靜止，那么 $\boldsymbol{V}$ 是該力学体系慣性中

心运动的速度，而 $\mu\boldsymbol{V}$ 是它的总冲量 $\boldsymbol{P}$（相对于 K）。于是

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}'+[\boldsymbol{RP}]。\tag{9,6}$$

换句話說，力学体系的冲量矩是由它的"固有矩"和矩 $[\boldsymbol{RP}]$ 所組成，前者是在相对于体系为静止的系統中体系的矩，而后者是体系整体运动所产生的矩。

虽然矩（对任意的坐标原点）的所有三个分量的守恒定律只是对封閉系才成立，但在較局限的形式下，这定律对在外場中的体系也可成立。从上面推出的結論可以看出，冲量矩在場的对称軸上的投影总是守恒的，因此，当体系繞这个軸任意轉动时，它的力学性質不变，当然，这时矩应該相对于在这軸上的任意一点（坐标原点）来决定。

此类場的較重要的情况是中心对称的場，即位能只依賴于到空間某一定点（中心）的距离的場。很明显，当在此場中运动时，矩在通过中心的任意軸上的投影都是守恒的。換言之，矩向量 $\boldsymbol{M}$ 是守恒的，但此矩不是相对于空間任意一点，而是相对于場的中心来决定的。

另一个例子是沿 z 軸的均匀場，在这种場中矩的投影 M_z 守恒，而且坐标原点可以任意选择。

应当指出，矩在任意軸（称它为 z 軸）上的投影可对拉格朗日函数微分按公式

$$M_z=\sum_a\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_a}\tag{9,7}$$

求得，其中坐标 φ 是繞軸 z 的轉角。由于前述的冲量矩守恒定律的推导的性質，这一点是很明显的，但也可用直接的运算来証实。在圓柱坐标 r,φ,z 里我們有（代入 $x_a=r_a\cos\varphi_a$，$y_a=r_a\sin\varphi_a$）

$$M_z=\sum_a m_a(x_a\dot{y}_a-y_a\dot{x}_a)=\sum_a m_a r_a^2\dot{\varphi}_a。\tag{9,8}$$

另一方面，由这些变量表示的拉格朗日函数具有如下形式：

$$L=\frac{1}{2}\sum_a m_a(\dot{r}_a^2+r_a^2\dot{\varphi}_a^2+\dot{z}_a^2)-U,$$

把它代入公式(9,7)就可导出式(9,8)。

習 題

1. 試求在圓柱坐标 r, φ, z 中質点冲量矩的笛卡尔分量和其絕对值的表示式。

答：
$$M_x=m\sin\varphi(r\dot{z}-z\dot{r})-mrz\dot{\varphi}\cos\varphi,$$
$$M_y=m\cos\varphi(z\dot{r}-r\dot{z})-mrz\dot{\varphi}\sin\varphi,$$
$$M_z=mr^2\dot{\varphi},$$
$$M^2=m^2r^2\dot{\varphi}^2(r^2+z^2)+m^2(r\dot{z}-z\dot{r})^2。$$

2. 同上題，試求在球坐标中的表示式。

答：
$$M_x=-mr^2(\dot{\theta}\sin\varphi+\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta\cos\varphi),$$
$$M_y=mr^2(\dot{\theta}\cos\varphi-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta\sin\varphi),$$
$$M_z=mr^2\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi},$$
$$M^2=m^2r^4(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}^2)。$$

3. 在下面各种場中運動时，冲量 $\boldsymbol{P}$ 和矩 $\boldsymbol{M}$ 的那些分量是守恒的。

(a) 无限大的均匀平面的場。

答：P_x, P_y, M_z (无限的平面是平面 xy)。

(б) 无限長的均匀圓柱的場。

答：M_z, P_z (圓柱的軸是 z 軸)。

(в) 无限長的均匀棱柱的場。

答：P_z (棱柱的棱角平行于軸 z)。

(г) 两点的場。

答：M_z (两点都在軸 z 上)。

(д) 无限的均匀半平面的場。

答：P_y (无限的半平面是平面 xy 的以軸 y 为界的部分)。

(е) 均匀圓錐体的場。

答：M_z (錐体軸为 z 軸)。

(ж) 均匀圓环面的場。

答：M_z (圆环面的軸为 z 軸)。

(3)无限長的均匀柱形螺旋綫的場。

解：当繞螺旋綫的軸(軸 z)轉动一个角度 $\delta\varphi$，同时沿着此軸移动一距离 $\frac{h}{2\pi}\delta\varphi$ 时(h 是螺距)，拉格朗日函数不变。所以

$$\delta L=\frac{\partial L}{\partial z}\delta z+\frac{\partial L}{\partial\varphi}\delta\varphi=\left(\dot{P}_z\frac{h}{2\pi}+\dot{M}_z\right)\delta\varphi=0,$$

由此

$$M_z+\frac{h}{2\pi}P_z=\text{常数}。$$

§10. 力学的相似

对拉格朗日函数乘以任意一常数因子，显然并不改变运动方程。这种情况(在 §2 已指出)使得有可能在一系列重要情况下，不具体地去积分运动方程，而作出关于运动性質的某些根本性的結論。

当位能是坐标的齐次函数，亦即满足条件

$$U(\alpha\boldsymbol{r}_1,\alpha\boldsymbol{r}_2,\cdots,\alpha\boldsymbol{r}_n)=\alpha^k U(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_n) \qquad (10,1)$$

的函数时就屬于此种情况，这里 α 是任意常数，而 k 是函数的次数。

現在我們来进行下述变换：所有坐标变为 α 倍，同时时間变为 β 倍，即

$$\boldsymbol{r}_a\to\alpha\boldsymbol{r}_a;\quad t\to\beta t。$$

这时所有的速度 $\boldsymbol{v}_a=\frac{d\boldsymbol{r}_a}{dt}$ 变为 α/β 倍，而动能变为 α^2/β^2 倍。位能则乘以 α^k。如果以条件

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2}=\alpha^k,\quad \text{也就是}\quad \beta=\alpha^{1-\frac{k}{2}},$$

把 α 和 β 联系起来，那么，由于这样的变换，整个拉格朗日函数被乘上一个常数因子 α^k，即运动方程不变。

質点所有坐标改变同样倍数就意味着由一些軌道轉移到另外一些几何上相似而仅仅綫度不同的軌道上。于是，我們得出結論：

如果体系的位能是(笛卡尔)坐标的 k 次齐次函数,那么,运动方程使几何上相似的軌道,及(在軌道对应的点之間)运动的时間有关系式

$$\frac{t'}{t}=\left(\frac{l'}{l}\right)^{1-\frac{k}{2}}, \tag{10,2}$$

其中 l'/l 为两个軌道綫度之比。除时間以外,在軌道上对应的点,于对应的时刻,所有力学量的值也是由比 l'/l 的次数决定的。譬如說,对于速度,能量和冲量矩就有

$$\frac{v'}{v}=\left(\frac{l'}{l}\right)^{\frac{k}{2}},\quad \frac{E'}{E}=\left(\frac{l'}{l}\right)^{k},\quad \frac{M'}{M}=\left(\frac{l'}{l}\right)^{1+\frac{k}{2}}。 \tag{10,3}$$

下面举几个例子来加以說明。

我們将要看到,在所謂微振动的情况下位能是坐标的二次函数($k=2$)。从(10,2)我們得到,这种振动的周期不依賴于它們的振幅。

在均匀力場中位能是坐标的綫性函数[見(5,8)],即 $k=1$。由于(10,2)我們有

$$\frac{t'}{t}=\sqrt{\frac{l'}{l}}。$$

由此得出結論,譬如說在重力場中下落时,下落所需时間平方之比等于它們最初高度之比。

两个質量間的牛頓引力或两个电荷間的庫侖相互作用,其位能都与粒子間的距离成反比,即位能是 $k=-1$ 次齐次函数。在这种情况下

$$\frac{t'}{t}=\left(\frac{l'}{l}\right)^{3/2},$$

于是我們可以肯定,譬如說,沿閉合軌道运动一周的时間的平方与軌道綫度的立方成正比(即所謂刻卜勒第三定律)。

如果体系的位能是坐标的齐次函数,体系的运动又在有限的

空間范圍內进行，則在此范圍內动能和位能对时間的平均值之間存在着非常簡單的关系，此关系称为維里定律。

既然动能 T 是速度的二次函数，所以根据齐次函数的欧勒定理

$$\sum_a \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{v}_a} \boldsymbol{v}_a = 2T,$$

再引入冲量

$$\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{v}_a} = \boldsymbol{p}_a,$$

我們就有

$$2T = \sum_a \boldsymbol{p}_a \boldsymbol{v}_a = \frac{d}{dt}\left(\sum_a \boldsymbol{r}_a \boldsymbol{p}_a\right) - \sum_a \boldsymbol{r}_a \dot{\boldsymbol{p}}_a。 \qquad (10,4)$$

我們来把这个等式对时間平均。任何一个时間的函数 $f(t)$ 的平均值

$$\overline{f} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(t)\,dt。$$

很容易看出，如果 $f(t)$ 是有界（即不具有无穷大値的）函数 $F(t)$ 对时間的微商，那么它的平均値将等于零。事实上，

$$\overline{f} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{dF}{dt}\,dt = \lim_{\tau\to\infty} \frac{F(\tau) - F(0)}{\tau} = 0。$$

假定說，体系以不变为无穷大的速度在有限的空間范圍內运动。那么，量 $\sum \boldsymbol{r}_a \boldsymbol{p}_a$ 是有界的，而等式(10,4)右边第一項的平均値变为零。在第二項中我們按牛頓方程把 $\dot{\boldsymbol{p}}_a$ 換成 $-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_a}$，就可得到[①]

$$2\overline{T} = \sum_a \boldsymbol{r}_a \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_a}。 \qquad (10,5)$$

如果位能是所有向徑 $\boldsymbol{r}_a$ 的 k 次齐次函数，那么按照欧勒定理，等式(10,5)将变成所求的关系式

$$2\overline{T} = k\overline{U}。 \qquad (10,6)$$

① 等式(10,5)右边的式子有时称为体系的維里。

由于 $\overline{T}+\overline{U}=\overline{E}=E$，关系式(10,6)可以表示成公式

$$\overline{U}=\frac{2}{k+2}E, \quad \overline{T}=\frac{k}{k+2}E, \tag{10,7}$$

此两公式把 $\overline{U}$ 和 $\overline{T}$ 通过体系的总能量表示出来了。

值得特别注意的是，对于微振动($k=2$)我們有

$$\overline{T}=\overline{U},$$

即动能和位能的平均值相同。对于牛顿相互作用($k=-1$)，

$$2\overline{T}=-\overline{U}。$$

这时 $E=-\overline{T}$ 是由于在这种相互作用的情况下，运动在有限的空間范圍內进行只有在总能量为負的条件下才有可能。

習　　題

1．不同質量的两个質点沿同一軌道运动，在位能相同的情况下，它們运动的时間之比等于什么？

答：

$$\frac{t'}{t}=\sqrt{\frac{m'}{m}}。$$

2．当位能乘上一个常数时，沿相同軌道运动的时間将如何变化？

答：

$$\frac{t'}{t}=\sqrt{\frac{U}{U'}}$$

第三章　运动方程的积分

§11. 一維运动

一个自由度的体系的运动叫做一維运动。这种体系若处在不变的外界条件下，則它的拉格朗日函数的最普遍的形式为

$$L=\frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2-U(q), \qquad (11,1)$$

式中 $a(q)$ 是广义坐标 q 的某函数。特别是当 q 是笛卡尔坐标（我們称它为 x）时，

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-U(x)。 \qquad (11,2)$$

相应于这些拉格朗日函数的运动方程在一般形式下就可积分。这时，甚至沒有必要写出运动方程式本身，而应直接从第一积分，即表达能量守恒定律的方程式出發。这样，对拉格朗日函数(11,2)，我們有

$$\frac{m\dot{x}^2}{2}+U(x)=E。$$

这是一个可以用分离变量法求积分的一級微分方程式。我們有

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(x)]},$$

由此

$$t=\sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}+常数。 \qquad (11,3)$$

总能量 E 和积分常数在运动方程式的解里起着两个任意常数的作用。

因为动能在本質上是个正数，所以在运动时，总能量必須大于位能，也就是說，运动只能在 $U(x)<E$ 的空間范圍內發生。

假定函数 $U(x)$ 有如圖 6 所示的形式。在圖上画一条相当于总能量給定值的水平綫，我們馬上就能指出运动可能發生的范圍。在圖 6 所示的情况下，运动只能發生在 AB 区間內或在 C 点的右边。

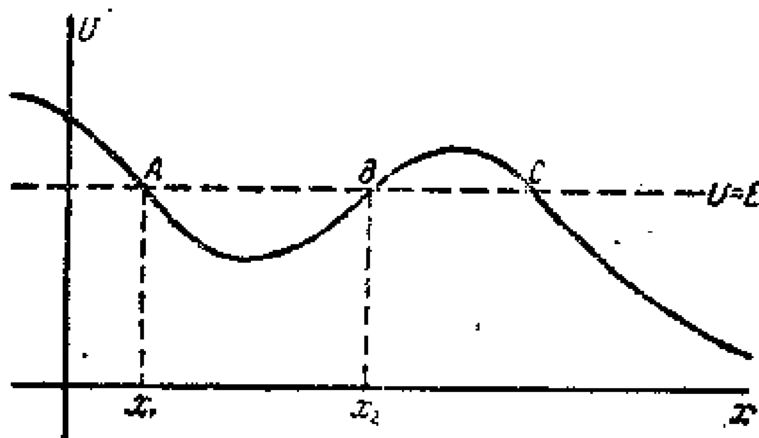


圖 6.

位能等于总能量，亦即

$$U(x)=E \tag{11,4}$$

的各点决定运动的界限。由于在这些点上速度为零，所以称它們为"停点"。如果运动区間由两个停点限制，則运动發生在有限的空間范圍，这种运动叫做**有限运动**。如果运动的范圍是沒有限制的或只限制一方面，則运动叫做**无限运动**，質点向无限远处运动。

一維有限运动是一种振动，即質点在两界限之間(在圖 6 上为 x_1 和 x_2 两点間的"**位阱**" AB 中)作周期性的往返运动。根据可逆性的一般性質(見第 11 頁)，在这种情况下，由 x_1 到 x_2 的运动时間和由 x_2 到 x_1 的逆运动的时間是相等的。所以振动周期 T，即由 x_1 到 x_2 再返回 x_1 的时間，是通过 x_1x_2 所需时間的二倍，根据(11,3)，

$$T(E)=\sqrt{2m}\int_{x_1(E)}^{x_2(E)}\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}, \tag{11,5}$$

并且上下限 x_1 同 x_2 是方程(11,4)在 E 为给定值时的根。这个公式决定运动周期对粒子总能量的依赖关系。

習 題

1. 求平面数学摆（質点 m 系在長为 l 的細綫末端，在重力場中振动）的振动周期对振幅的依賴关系。

解： 摆的能量

$$E=\frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2}-mgl\cos\varphi=-mgl\cos\varphi_0,$$

式中 φ 表示綫对竪直方向的偏角，φ_0 是最大偏角。把周期当成是通过由零到 φ_0 的間隔所需时間的四倍来計算，可得

$$T=4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}}=2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}}}$$

以 $\dfrac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}=\sin\xi$ 代入，则此积分就化为

$$T=4\sqrt{\frac{l}{g}}K\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}\right),$$

式中

$$K(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}}$$

是所謂第一类全橢圓积分。在 $\sin\frac{\varphi_0}{2}\approx\frac{\varphi_0}{2}\ll1$ 的情况下（微振动），展开函数 $K(k)$ 可得

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{1}{16}\varphi_0^2+\cdots\right)。$$

这个展开式的第一项是大家都知道的基本公式。

2. 当質量为 m 的粒子在下列各种場中运动时，求它的振动周期对能量的依賴关系：

(a) $U=A|x|^n$。

答：

$$T=2\sqrt{2m}\int_0^{(E/A)^{\frac{1}{n}}}\frac{dx}{\sqrt{E-Ax^n}}=\frac{2\sqrt{2m}\,E^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}}{A^{\frac{1}{n}}}\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{1-y^n}}。$$

以 $y^n=u$ 代入，积分化成用 Γ 函数表示的所謂 B 欧勒积分，

$$T=\frac{2\sqrt{2\pi m}\,\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{nA^{\frac{1}{n}}\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)}E^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}。$$

T 对 E 的依賴关系是与力学的相似規律(10,2)，(10,3)相符合的。

(б) $U=-\dfrac{U_0}{\mathrm{ch}^2\alpha x}$，$-U_0<E<0$。

答：
$$T=\frac{\pi\sqrt{2m}}{\alpha\sqrt{|E|}}。$$

(в) $U=U_0\mathrm{tg}^2\alpha x$

答：
$$T=\frac{\pi\sqrt{2m}}{\alpha\sqrt{E+U_0}}。$$

§ 12. 由振动周期求位能

我們現在来研究一个問題，就是一粒子在場中振动，由已知的振动周期 T 对能量 E 的依賴关系反过来求位能 $U(x)$ 的形式能到怎样的程度。从数学观点来看，上面所說的就是解积分方程式(11,5)，并且其中的 $U(x)$ 我們認为是未知的，而 $T(E)$ 認为是已知的。

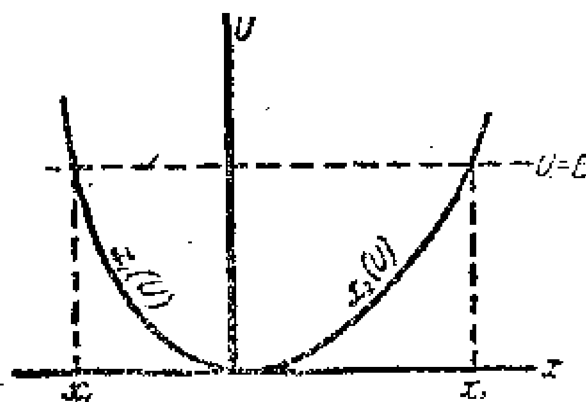


圖 7.

不管积分方程的解是否存在，我們先假定在所研究的空間范圍內，所求函数 $U(x)$ 只有一个極小值。为方便起見把坐标原点选在位能为極小值的地方，在这点的位能值設为零(圖 7)。

变换积分(11,5)，并把式中的 x 当作 U 的函数。$x(U)$ 是双值函数，即位能的每个值对应于 x 两个不同的值。以 $\dfrac{dx}{dU}dU$ 代 dx，

积分 (11,5) 就换成两个积分即从 $x=x_1$ 到 $x=0$ 与从 $x=0$ 到 $x=x_2$ 的两个积分的和了。我們把在这两个范圍内 x 对 U 的依赖关系写成 $x=x_1(U)$ 与 $x=x_2(U)$。

对 dU 积分的上下限很明显是 E 和 0，于是

$$T(E)=\sqrt{2m}\int_0^E \frac{dx_2(U)}{dU}\frac{dU}{\sqrt{E-U}}+\sqrt{2m}\int_E^0 \frac{dx_1(U)dU}{dU\sqrt{E-U}}=$$

$$=\sqrt{2m}\int_0^E\left[\frac{dx_2}{dU}-\frac{dx_1}{dU}\right]\frac{dU}{\sqrt{E-U}}。$$

以 $\sqrt{\alpha-E}$（α 是参数）来除等式两边，并对 E 从零到 α 积分：

$$\int_0^\alpha \frac{T(E)dE}{\sqrt{\alpha-E}}=$$

$$=\sqrt{2m}\int_0^\alpha\int_0^E\left[\frac{dx_2(U)}{dU}-\frac{dx_1(U)}{dU}\right]\frac{dUdE}{\sqrt{(\alpha-E)(E-U)}},$$

改变积分次序可得

$$\int_0^\alpha \frac{T(E)dE}{\sqrt{\alpha-E}}=$$

$$=\sqrt{2m}\int_0^\alpha\left[\frac{dx_2(U)}{dU}-\frac{dx_1(U)}{dU}\right]dU\int_U^\alpha\frac{dE}{\sqrt{(\alpha-E)(E-U)}}。$$

不难得到对 dE 的积分等于 π。此后，对 dU 积分我們便得到

$$\int_0^\alpha \frac{T(E)dE}{\sqrt{\alpha-E}}=\pi\sqrt{2m}\,[x_2(\alpha)-x_1(\alpha)]$$

[这里应考虑到 $x_2(0)=x_1(0)=0$]。以 U 代 α，最后求得

$$x_2(U)-x_1(U)=\frac{1}{\pi\sqrt{2m}}\int_0^U\frac{T(E)dE}{\sqrt{U-E}}。\qquad(12,1)$$

因此，根据已知函数 $T(E)$，就能确定差 $x_2(U)-x_1(U)$。而函数 $x_1(U)$ 和 $x_2(U)$ 本身还是不确定的。这就是說，存在着不是一条，而是无限多条曲綫 $U=U(x)$，它們給出周期对能量的依赖关系，相互的区别在于一些形变，而这些形变并不改变对应于同一

U 值的两 x 值之差。

如果要求曲綫 $U=U(x)$ 对縱坐标軸是对称的，即要求

$$x_2(U)=-x_1(U)=x(U)$$

成立，那么解的多値性就沒有了。在这种情况下公式 (12,1) 給出 $x(U)$ 的單值表达式如下：

$$x(U)=\frac{1}{2\pi\sqrt{2m}}\int_0^U\frac{T(E)dE}{\sqrt{U-E}}。\tag{12,2}$$

§ 13. 折合質量

关于由两个相互作用着的粒子所組成的体系运动的問題（"双体問題"）是極为重要的，这种問題可在一般形式下完全解决。

作为解决这种問題的第一步，我們来証明，把体系的运动分解为慣性中心的和相对于慣性中心的两种运动，問題可以怎样大大簡化。

两粒子相互作用的位能只与其間的距离有关，即只与它們向徑之差的絕对值有关。因此这样的体系的拉格朗日函数

$$L=\frac{m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1^2}{2}+\frac{m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2^2}{2}-U(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|)。\tag{13,1}$$

引进两点相互距离的向量

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2,$$

再把坐标原点放在慣性中心上，則有

$$m_1\boldsymbol{r}_1+m_2\boldsymbol{r}_2=0。$$

从最后两等式可求得

$$\boldsymbol{r}_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{r},\quad \boldsymbol{r}_2=-\frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}。\tag{13,2}$$

将这些式子代入(13,1)可得

$$L=\frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2}-U(r),\tag{13,3}$$

式中引进了符号

$$m=\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2};\tag{13,4}$$

量m叫做折合質量。函数(13,3)在外形上与一个質量为m，在对静止坐标原点对称的外場$U(r)$内运动的質点的拉格朗日函数相同。

这样一来，关于相互作用着的两个質点的运动的問題就化成解一个質点在給定外場$U(r)$中运动的問題了。根据問題的解$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，粒子$m_1$和$m_2$的軌道$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_1(t)$和$\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_2(t)$（相对于它們的共同的慣性中心）都可由公式(13,2)式得出。

習 題

有一体系由質量为M的一个粒子和質量为m的n个粒子所組成。把慣性中心的运动除掉，并把这个問題化为n个粒子运动的問題。

解： 設$\boldsymbol{R}$为粒子M的向徑，$\boldsymbol{R}_a(a=1,2,\cdots,n)$为質量为$m$的粒子的向徑。引进从粒子$M$到粒子$m$的距离

$$\boldsymbol{r}_a=\boldsymbol{R}_a-\boldsymbol{R},$$

同时把坐标原点选在慣性中心上：

$$M\boldsymbol{R}+m\sum_a \boldsymbol{R}_a=0。$$

从这些等式可求得

$$\boldsymbol{R}=-\frac{m}{M+mn}\sum_a \boldsymbol{r}_a,\quad \boldsymbol{R}_a=\boldsymbol{R}+\boldsymbol{r}_a。$$

将这些式子代入拉格朗日函数

$$L=\frac{M\dot{\boldsymbol{R}}^2}{2}+\frac{m}{2}\sum_a \dot{\boldsymbol{R}}_a^2-U$$

中，可得

$$L=\frac{m}{2}\sum_a \dot{\boldsymbol{r}}_a^2-\frac{m^2}{2(M+nm)}\left(\sum_a \dot{\boldsymbol{r}}_a\right)^2-U。$$

位能只依賴于粒子之間的距离，因而可以看作是向量$\boldsymbol{r}_a$的函数。

§ 14. 在中心場中的运动

把双体运动化为單体运动时，我們碰到解一个質点在位能只依賴于到某一定点的距离的外場中运动的問題；这种場称为**中心場**。作用于粒子上的力

$$\boldsymbol{F}=-\frac{\partial U(r)}{\partial \boldsymbol{r}}=-\frac{dU}{dr}\frac{\boldsymbol{r}}{r},$$

其絕对值这时也只依賴于 r，并且方向与向徑一致。

在 § 9 中已經証明了，在中心場中运动时，体系对場中心的冲量矩是守恒的。一个粒子的冲量矩是

$$\boldsymbol{M}=[\boldsymbol{r}\boldsymbol{p}]。$$

由于向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{M}$ 垂直，所以 $\boldsymbol{M}$ 不变就意味着在运动时質点的向徑永远在一个垂直于 $\boldsymbol{M}$ 的平面上。

因此，在中心場中运动的粒子軌道完全在一个平面上。用極坐标 r, φ，我們可以把拉格朗日函数写成[比較(4, 5)]

$$L=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)-U(r)。\qquad (14, 1)$$

这个函数不显含坐标 φ。在拉格朗日函数中不显含的广义坐标称为循环坐标。由于拉格朗日方程式，对于这些坐标我們有

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial L}{\partial q_i}=0,$$

也就是說，与这些坐标对应的广义冲量 $p_i=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ 是运动积分。因此，当存在循环坐标时，这种情况使得积分运动方程的問題大大簡化。

在現在这种情况下，广义冲量

$$p_\varphi=mr^2\dot{\varphi}$$

与冲量矩 $M_z=M$ 相合[見(9, 8)]，因此，我們又回到了我們已熟

知的冲量矩守恒定律

$$M = mr^2\dot{\varphi} = 常数。\quad (14,2)$$

应当注意，对一个質点在中心場中作平面运动的这个规律可以給出簡單的几何解釋。表达式$\frac{1}{2}r\cdot rd\varphi$是由两个无限近的向徑及軌道弧元所形成的扇形面积(圖8)。用df来表示它，我們可把粒子的矩写成

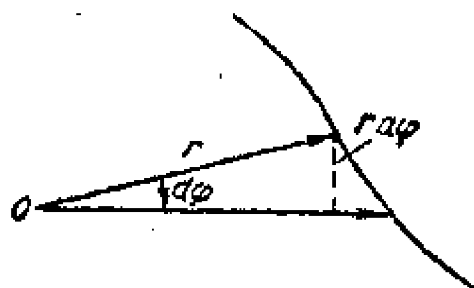


圖 8.

$$M = 2m\dot{f}, \quad (14,3)$$

式中$\dot{f}$的微商称为扇形速度。所以，冲量矩守恒定律意味着，扇形速度是个常量，也就是說，在相等的时間間隔內，动点的向徑扫过相等的面积(即所謂刻卜勒第二定律)[①]。

从能量及冲量矩守恒定律出發，質点在中心場里运动的問題可以很簡單地得到完全解决，而同时无須写出运动方程式本身。按(14,2)通过M来表达$\dot{\varphi}$，并把它代入能量的表示式內，可得到

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r)。\quad (14,4)$$

由此

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2r^2}}, \quad (14,5)$$

分离变量并积分就可得到

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2r^2}}} + 常数, \quad (14,6)$$

其次，把(14,2)写成

$$d\varphi = \frac{M}{mr^2}dt,$$

从(14,5)中把dt代入此式并积分，我們得到

① 在中心場中运动的粒子的冲量矩守恒定律有时称为面积积分。

$$\varphi=\int\frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m[E-U(r)]-\frac{M^2}{r^2}}}+\text{常数}。\qquad(14,7)$$

公式(14,6)和(14,7)是在一般形式下解决所提出的問題。其中第二个公式确定 r 和 φ 之間的关系，也就是說，确定軌道方程。而公式(14,6)用不明显的方式确定作为时間函数的动点到中心的距离 r。我們指出，角度 φ 总是随着时間單調地变化，因从(14,2)可見，$\dot{\varphi}$ 任何时候都不变号。

表达式(14,4)指出，运动在徑向的部分可看成在場中的一維运动，这个場的有效位能

$$U_{\text{有效}}=U(r)+\frac{M^2}{2mr^2}。\qquad(14,8)$$

量 $\frac{M^2}{2mr^2}$ 称为离心能。从式

$$U(r)+\frac{M^2}{2mr^2}=E\qquad(14,9)$$

中得出的 r 的值确定运动区域的边界到中心的距离。当公式(14,9)被滿足时，徑向速度 $\dot{r}$ 变为零。这并不意味着質点停止(像在真正一維运动的情况下那样)，因为角速度 $\dot{\varphi}$ 并不变为零。等式 $\dot{r}=0$ 表示軌道的"轉变点"，函数 $r(t)$ 在这点从增加变成减少或者是相反的变化。

如果許可 r 变化的区間仅由一个条件 $r\geqslant r_{\min}$ 限制的話，那末粒子的运动則是无限的，即它的軌道从无穷远处来又回到无穷远处去。

如果 r 的变化区間有两个边界 $r_{\min}$ 和 $r_{\max}$，那末，运动是有限的，而軌道則完全位于两个圓 $r=r_{\max}$ 和 $r=r_{\min}$ 所限制的环内。然而，这并不意味着軌道一定是閉合曲綫。在 r 从 $r_{\max}$ 变到 $r_{\min}$ 再回到 $r_{\max}$ 这一时間間隔內，向徑轉了一个角度 $\Delta\varphi$，根据(14,7)

它等于

$$\Delta\varphi=2\int_{r_{min}}^{r_{max}}\frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m(E-U)-\frac{M^2}{r^2}}}。\qquad(14,10)$$

軌道閉合的条件是要使得这个角度与 2π 之比为有理分数，即 $\Delta\varphi=\frac{2\pi m}{n}$，式中 m 和 n 是整数。在这个条件下，經 n 个周期的时間，点的向徑在轉了整整 m 圈后将与自己最初的值重合，即軌道閉合。

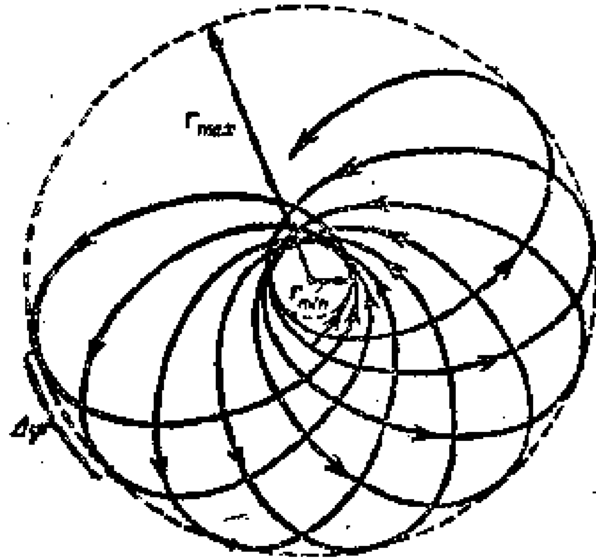


圖 9.

但是，这样一些情况是罕見的，在任意形式的 $U(r)$ 的情况下，角度 $\Delta\varphi$ 与 2π 之比并不是有理分数。因此在一般情况下，有限运动的軌道并不是閉合的。軌道无数次經过最大的和最小的距离（例如，像圖 9 一样），而在无限長的时間后填滿由两个圓所限制的整个圓环。

只有在两类中心場中，一切有限运动的軌道才都是閉合的，这就是粒子位能和 $\frac{1}{r}$ 及 r^2 成正比的場。第一种情形将在下节中研究，而第二种情形則和所謂空間振子相当（見 § 23 習題 4）。

(14,5) 中的平方根［以及 (14,6) 和 (14,7) 中的被积式］在轉折点变号。如果角度 φ 从通过轉折点的向徑方向算起，那末轉折点两旁的軌道，在 r 值相同的每一地方，其区别仅在于 φ 的符号。这就是說，相对于上述的方向，軌道是对称的。从任何一个，比方說，$r=r_{max}$ 的点开始經过一段軌道而到达 $r=r_{min}$，然后，在下一个 $r=r_{max}$ 的点之前，将有对称安置的同样一段軌道，如此类推，也就

是說，整个軌道可以用向前和向后重复同样的一段来得到。由从轉折点 $r=r_{\min}$ 伸向无穷远处的两个对称分支組成的无限运动亦是如此。

离心能(在运动时 $M\neq 0$ 的情况下)，当 $r\to 0$ 时，像 $\frac{1}{r^2}$ 一样变成无穷大，它的存在通常使得运动的粒子不可能通过場的中心，即使是中心本身具有吸引的特性也是如此。只有位能当 $r\to 0$ 时足够快地趋向于 $-\infty$ 时，質点"落"到中心才有可能。从不等式

$$\frac{m\dot{r}^2}{2}=E-U(r)-\frac{M^2}{2mr^2}>0$$

或

$$r^2U(r)+\frac{M^2}{2m}<Er^2$$

可得出結論，r 要有取得趋向于零的数値的可能，必須

$$r^2U(r)\big|_{r\to 0}<-\frac{M^2}{2m},\tag{14,11}$$

也就是說，$U(r)$ 应該像 $\alpha>\frac{M^2}{2m}$ 的 $-\frac{\alpha}{r^2}$ 一样趋向于 $-\infty$，或者是和 $n>2$ 的 $-\frac{1}{r^n}$ 成正比。

習　　題

1. 积分球擺(即重力場中，在半徑为 l 的球面上运动的質点 m)的运动方程式。

解：在原点位于球心而 z 軸豎直向下的球坐标中，擺的拉格朗日函数是

$$L=\frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}^2)+mgl\cos\theta。$$

φ 是循环坐标，因此同矩的 z 分量相合的广义动量 p_φ 守恒：

$$ml^2\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}=M_z=常数。\tag{1}$$

能量

$$E=\frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}^2)-mgl\cos\theta=\frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2}+\frac{M_z^2}{2ml^2\sin^2\theta}-mgl\cos\theta。\tag{2}$$

由此解出 θ，再分离变量可得

$$t=\int\frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{ml^2}[E-U_{эфф}(\theta)]}},\tag{3}$$

这里引进了"有效位能"

$$U_{эфф}(\theta)=\frac{M_z^2}{2ml^2\sin^2\theta}-mgl\cos\theta。$$

利用(1)，我們找到角度 φ 为

$$\varphi=\frac{M_z}{l\sqrt{2m}}\int\frac{d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{E-U_{эфф}(\theta)}}。\tag{4}$$

积分(3)和(4)可化为第一类和第三类橢圓积分。

角 θ 运动的区域由条件 $E>U_{эфф}$ 来决定，而它的边界由方程 $E=U_{эфф}$ 决定。此方程是 $\cos\theta$ 的三次方程，在 -1 和 $+1$ 間有两个根，这两个根确定了球面上两平行圓的位置，整个軌道都位于这两个圓之間。

2. 在重力場中，有一質点在頂朝下豎直放著的圓錐体（頂点張角为 2α）表面上运动，試积分它的运动方程。

解： 在以錐的頂点为原点極軸豎直向上的球坐标中拉格朗日函数是：

$$L=\frac{m}{2}(\dot r^2+r^2\sin^2\alpha\cdot\dot\varphi^2)-mgr\cos\alpha。$$

坐标 φ 是循环的，故

$$M_z=mr^2\sin^2\alpha\dot\varphi$$

又是守恒的，能量

$$E=\frac{m\dot r^2}{2}+\frac{M_z^2}{2mr^2\sin^2\alpha}+mgr\cos\alpha。$$

用与習題1同样方法，我們得到

$$t=\int\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-U_{эфф}(r)]}},$$

$$\varphi=\frac{M_z}{\sin^2\alpha\sqrt{2m}}\int\frac{dr}{r^2\sqrt{E-U_{эфф}(r)}},$$

$$U_{эфф}(r)=\frac{M_z^2}{2mr^2\sin^2\alpha}+mgr\cos\alpha。$$

条件 $E=U_{эфф}(r)$ 是 r 的三次方程（当 $M_z\neq0$ 时），它有两个正根，这两个正根确定在錐面上两个水平圓的位置，而軌道則被限制在这两个水平圓之

開。

3. 試积分平面摆的运动方程，設摆的悬挂点(具有質量 m_1)可以在水平方向运动(見圖 2)。

解：在 § 5 的習題 2 里所找到的拉格朗日函数中，x 是循环坐标。因此，和系統总冲量在水平分量相重合的广义冲量 P_x 是守恒的：

$$P_x=(m_1+m_2)\dot{x}+m_2l\dot{\varphi}\cos\varphi=\text{常数}, \tag{1}$$

总可以把体系整体看做靜止的，这时常数＝0，而微分方程(1)給出关系式

$$(m_1+m_2)x+m_2l\sin\varphi=\text{常数}, \tag{2}$$

这表示在水平方向上体系的慣性中心是靜止的。利用(1)可得能量为

$$E=\frac{m_2l^2\dot{\varphi}^2}{2}\left(1-\frac{m_2}{m_1+m_2}\cos^2\varphi\right)-m_2gl\cos\varphi, \tag{3}$$

由此
$$t=l\sqrt{\frac{m_2}{2(m_1+m_2)}}\int\sqrt{\frac{m_1+m_2\sin^2\varphi}{E+m_2gl\cos\varphi}}\,d\varphi。$$

借助于(2)通过 φ 来表达粒子 m_2 的坐标 $x_2=x+l\sin\varphi$，$y_2=l\cos\varphi$ 后，我們可得到結論：該粒子的軌道仍是以 $\frac{lm_1}{(m_1+m_2)}$ 为水平半軸，而以 l 为竪直半軸的橢圓的一段。当 $m_1\to\infty$ 时，就回复到沿着圓弧摆动的一般数学摆的情况了。

§ 15. 刻卜勒問題

中心場的一个極重要的情况是位能与 r 成反比，从而相应的力与 r^2 成反比的場。牛頓万有引力場和庫侖靜电場就是这类場。我們知道：第一种場具有吸引的特性，而第二种場則可能是吸引的場，也可能是排斥的場。

我們先研究吸引場，在場中

$$U=-\frac{\alpha}{r}, \tag{15,1}$$

其中 α 是正的。有效位能

$$U_{\text{эфф}}=-\frac{\alpha}{r}+\frac{M^2}{2mr^2} \tag{15,2}$$

的圖形具有圖 10 上所示的形狀。当 $r\to0$ 时，它趋于∞，而当

$r\to\infty$ 时，它则由負值方面趋近于零，当 $r=\frac{M^2}{\alpha m}$ 时它有最小值，并等于

$$(U_{\text{эфф}})_{\min}=-\frac{\alpha^2 m}{2M^2}。\quad (15,3)$$

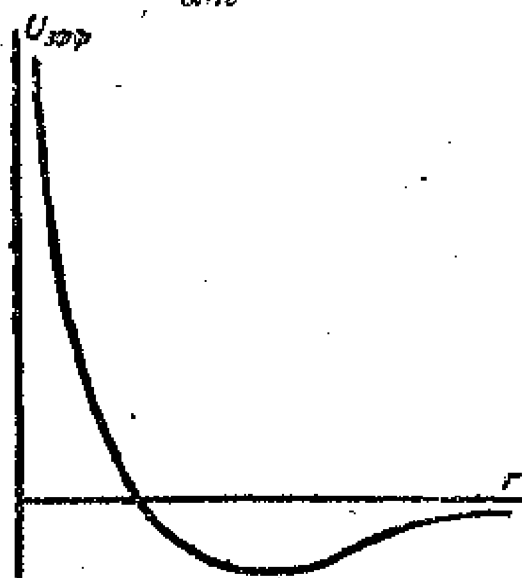


图 10.

从图上立刻看得出，当 $E>0$ 时質点的运动将是无限的，而当 $E<0$ 时則是有限的。

借助于一般的公式(14,7)可得到軌道的形状。将 $U=-\frac{\alpha}{r}$ 代入其中并进行初等的积分运算，我們将得到

$$\varphi=\arccos\frac{\frac{M}{r}-\frac{m\alpha}{M}}{\sqrt{2mE+\frac{m^2\alpha^2}{M^2}}}+常数。$$

我們适当选擇角度 φ 的計算起点，使得常数 $=0$，并引入符号

$$p=\frac{M^2}{m\alpha},\quad e=\sqrt{1+\frac{2EM^2}{m\alpha^2}},\qquad (15,4)$$

則軌道的公式可改写成

$$\frac{p}{r}=1+e\cos\varphi。\qquad (15,5)$$

这就是焦点在坐标原点的圓錐曲綫方程，p 和 e 是所謂軌道的参数和偏心率。从(15,5)可看出：我們所作的 φ 的計算起点的选擇，就在于 $\varphi=0$ 的点离中心最近(所謂軌道的近日点)。

在类似的情况下，当两个物体按規律(15,1)互相作用时，其中任一个粒子的軌道都是焦点在共同的慣性中心的圓錐曲綫。

从(15,4)可看出，当 $E<0$ 时偏心率 $e<1$，也就是說軌道是个橢圓(圖 11)，而按本节开始所述，运动是有限的。根据大家都熟

悉的解析几何学的公式,橢圓的半長軸和半短軸

$$a=\frac{p}{1-e^2}=\frac{\alpha}{2|E|},\quad b=\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}=\frac{M}{\sqrt{2m|E|}}。\tag{15,6}$$

能量的最小許可值符合于 (15,3),这时 $e=0$,也就是說橢圓变成为圓。应当指出,橢圓的長半軸只依賴于質点的能量(而不依賴于冲量矩)。距場中心(橢圓的焦点)最短和最長的距离等于

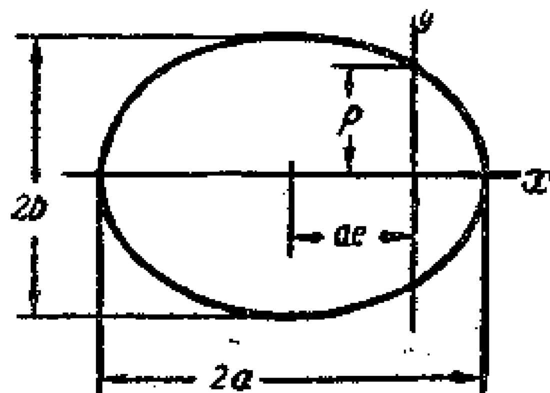


圖 11.

$$r_{\min}=\frac{p}{1+e}=a(1-e),\quad r_{\max}=\frac{p}{1-e}=a(1+e)。\tag{15,7}$$

这些表达式 [含有(15,6)和(15,4)的 a 和 e] 当然也可以当作方程式 $U_{\text{эфф}}(r)=E$ 的根直接得到。

沿橢圓軌道周轉的时間,也就是运动的周期 T,借助于以"面积积分" (14,3) 来表示的冲量矩守恒定律很容易求出。对时間从零到 T 积分此等式,我們將得到

$$2mf=TM,$$

式中 f 是軌道的面积。对于橢圓 $f=\pi ab$,再借助于公式(15,6)我們可得到

$$T=2\pi a^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{m}{\alpha}}=\pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}。\tag{15,8}$$

周期的平方应与軌道綫度的立方成正比这个事实已經在 § 10 中指出过了。还应指出的是,周期只依賴于質点的能量。

当 $E\geqslant0$ 时,运动是无限的。如果 $E>0$,那么偏心率 $e>0$,也就是說,軌道是繞过場中心(焦点)的双曲綫,正像圖 12 所示。近日点到中心的距离

$$r_{\min}=\frac{p}{e+1}=a(e-1),\quad(15,9)$$

式中:

$$a=\frac{p}{e^2-1}=\frac{\alpha}{2E}$$

是双曲線的"半軸"。

当 $E=0$ 时,偏心率 $e=1$,也就是說,粒子沿着近日点距离为 $r_{\min}=\frac{p}{2}$ 的抛物綫运动。如果粒子自无穷远处由靜止狀态开始自己的运动,就将出現这种情况。

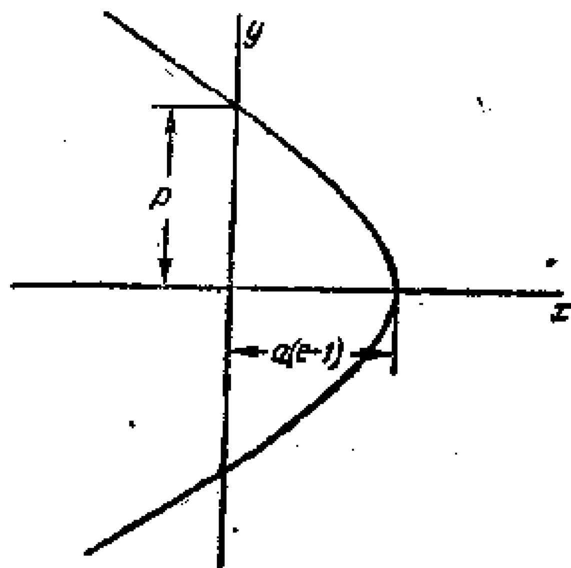


圖 12.

粒子沿軌道运动时,它的坐标对时間的依賴关系可以借助于一般的公式(14,6)找到。它可以按下面方法表示成極方便的参数形式。

我們先看橢圓的軌道。按照(15,4),(15,6)引入 a 和 e,把决定时間的积分(14,6)写成

$$t=\sqrt{\frac{m}{2|E|}}\int\frac{rdr}{\sqrt{-r^2+\frac{\alpha}{|E|}r-\frac{M^2}{2m|E|}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{ma}{\alpha}}\int\frac{rdr}{\sqrt{a^2e^2-(r-a)^2}}。$$

借助于理所当然的代换

$$r-a=-ae\cos\xi,$$

这个积分变成

$$t=\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}\int(1-e\cos\xi)d\xi=\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(\xi-e\sin\xi)+\text{常数}。$$

适当选擇計算时間的起点,使得常数变成零,我們最終将得到以下的 r 依賴于 t 的参数表达式:

$$r=a(1-e\cos\xi),\quad t=\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(\xi-e\sin\xi)\qquad(15,10)$$

(当 $t=0$ 时，粒子在近日点)。通过同一个参数 ξ 还可以表示粒子的笛卡尔坐标 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$ (x 和 y 轴分别沿着橢圓的長半軸和短半軸)。从(15,5)和(15,10)我們有

$$ex=p-r=a(1-e^2)-a(1-e\cos\xi)=ae(\cos\xi-e),$$

而 y 可由 $\sqrt{r^2-x^2}$ 来求，最后，

$$x=a(\cos\xi-e),\quad y=a\sqrt{1-e^2}\sin\xi. \qquad (15,11)$$

参数 ξ 从零变到 2π 对应着沿橢圓轉一周。

对双曲綫軌道进行完全类似的計算导出以下結果：

$$\left.\begin{aligned} r&=a(e\operatorname{ch}\xi-1), & t&=\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(e\operatorname{sh}\xi-\xi),\\ x&=a(e-\operatorname{ch}\xi), & y&=a\sqrt{e^2-1}\operatorname{sh}\xi, \end{aligned}\right\} \qquad (15,12)$$

式中参数 ξ 的数値从 $-\infty$ 到 $+\infty$。

我們再来研究在排斥的場中的运动，在此种場中

$$U=\frac{\alpha}{r} \qquad (15,13)$$

($\alpha>0$)。此时有效位能

$$U_{\text{эфф}}=\frac{\alpha}{r}+\frac{M^2}{2mr^2},$$

当 r 由零变到∞时它从 $+\infty$ 單調地下降到零。粒子的能量只可能是正的，因而运动总是无限的。这种情况的計算完全与上面所作的类似。軌道是双曲綫(当 $E=0$ 时是拋物綫)：

$$\frac{p}{r}=-1+e\cos\varphi \qquad (15,14)$$

[p 和 e 按原来的公式(15,4)决定]。它从場的中心旁边經过，如圖 13 所示。近日点距离

$$r_{\min}=\frac{p}{e-1}=a(e+1)。 \qquad (15,15)$$

它对时間的依賴关系由下面的参数方程給出：

$$\left.\begin{aligned}r&=a(e\operatorname{ch}\xi+1),\\ t&=\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(e\operatorname{sh}\xi+\xi),\\ x&=a(\operatorname{ch}\xi+e),\\ y&=a\sqrt{e^2-1}\operatorname{sh}\xi。\end{aligned}\right\}\quad(15,16)$$

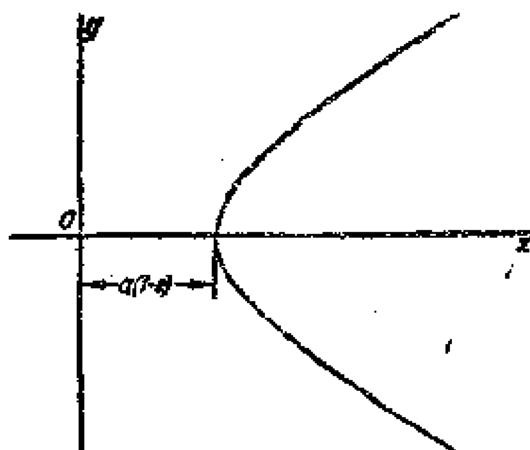


圖 13.

在結束本节时我們指出，在場 $U=\frac{\alpha}{r}$（α 的符号任意）中运动时，就有正是此种場所特有的运动积分。很容易用直接的計算檢驗

$$[\boldsymbol{v}\boldsymbol{M}]+\frac{\alpha\boldsymbol{r}}{r}=\text{常向量}。\qquad(15,17)$$

事实上，它对时間的全微商等于

$$[\dot{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{M}]+\frac{\alpha\boldsymbol{v}}{r}-\frac{\alpha\boldsymbol{r}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{r})}{r^3},$$

将 $\boldsymbol{M}=m[\boldsymbol{r}\boldsymbol{v}]$ 代入后，上式变为

$$m\boldsymbol{r}(\boldsymbol{v}\dot{\boldsymbol{v}})-m\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{v}})+\frac{\alpha\boldsymbol{v}}{r}-\frac{\alpha\boldsymbol{r}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{r})}{r^3},$$

按照运动方程 $m\dot{\boldsymbol{v}}=\frac{\alpha\boldsymbol{r}}{r^3}$ 可求得这个表示式为零。

我們着重指出，就像 $\boldsymbol{M}$ 积分和 E 积分一样，运动积分(15,17)是粒子状态（位置和速度）的單值函数。在§50中我們將看到，这个附加的單值积分的出現是与所謂运动的簡并联系着的。

習 題

1．試求当粒子在場 $U=-\frac{\alpha}{r}$ 中运动而具有能量 $E=0$（沿拋物綫）时，坐标对时間的依賴关系。

解： 在积分

$$t=\int\frac{r\,dr}{\sqrt{\frac{2\alpha}{m}r-\frac{M^2}{m^2}}}$$

中作代换
$$r=\frac{M^2}{2m\alpha}(1+\eta^2)=\frac{p}{2}(1+\eta^2),$$

結果得到所求关系的如下参数表达式：

$$r=\frac{p}{2}(1+\eta^2),\quad t=\sqrt{\frac{mp^3}{\alpha}}\frac{\eta}{2}\left(1+\frac{\eta^2}{2}\right),$$

$$x=\frac{p}{2}(1-\eta^2),\quad y=p\eta.$$

参数 η 的值从 $-\infty$ 到 $+\infty$。

2．試积分質点在中心場 $U=-\frac{\alpha}{r^2}$ $(\alpha>0)$ 中运动的方程。

解： 按照公式(14,6)，(14,7)，对 φ 和 t 的計算起点作适当地选擇我們求得：

(a)当 $E>0$ 时，$\frac{M^2}{2m}>\alpha$　$\frac{1}{r}=\sqrt{\frac{2mE}{M^2-2m\alpha}}\cos\left[\varphi\sqrt{1-\frac{2m\alpha}{M^2}}\right]$，

(6)当 $E>0$ 时，$\frac{M^2}{2m}<\alpha$　$\frac{1}{r}=\sqrt{\frac{2mE}{2m\alpha-M^2}}\operatorname{sh}\left[\varphi\sqrt{\frac{2m\alpha}{M^2}-1}\right]$，

(в)当 $E<0$ 时，$\frac{M^2}{2m}<\alpha$　$\frac{1}{r}=\sqrt{\frac{2m\cdot|E|}{2m\alpha-M^2}}\operatorname{ch}\left[\varphi\sqrt{\frac{2m\alpha}{M^2}-1}\right]$。

在所有三种情况下，

$$t=\frac{1}{E}\sqrt{\frac{m}{2}}\sqrt{Er^2-\frac{M^2}{2m}+\alpha}\,。$$

在(6)和(в)的情况下，軌道在 $\varphi\to\infty$ 时趋近于坐标原点，質点就沿此軌道"落"到中心。从給定的距离 r 落入中心是在有限的时間内进行的，它等于

$$\frac{1}{|E|}\sqrt{\frac{m}{2}}\left\{\sqrt{\alpha-\frac{M^2}{2m}+|E|r^2}-\sqrt{\alpha-\frac{M^2}{2m}}\right\}。$$

3．当給位能 $U=-\frac{\alpha}{r}$ 以小的增量 $\delta U(r)$ 时，有限运动的軌道将不再是閉合的了，每轉一周，軌道的近日点都移动一个小的角度 $\delta\varphi$。求在(a)$\delta U=\frac{\beta}{r^2}$，(6)$\delta U=\frac{\gamma}{r^3}$ 两种情况下的 $\delta\varphi$。

解： 当 r 从 r_{min} 变到 r_{max} 然后又重新变到 r_{min} 时，角 φ 的改变量由公

式(14,10)給出,我們把此式写成

$$\Delta\varphi=-2\frac{\partial}{\partial M}\int_{r_{min}}^{r_{max}}\sqrt{2m(E-U)-\frac{M^2}{r^2}}\,dr$$

(为了避免以后出現伪發散积分)。令 $U=-\frac{\alpha}{r}+\delta U$ 并按 δU 的方次展开被积函数,展开式的零次項給出 2π,而一次項給出所要找的移动 $\delta\varphi$:

$$\delta\varphi=\frac{\partial}{\partial M}\int_{r_{min}}^{r_{max}}\frac{2m\delta U\cdot dr}{\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{M^2}{r^2}}}=\frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{2m}{M}\int_0^{\pi}r^2\delta U\,d\varphi\right),\quad (1)$$

这里我們把对 dr 的积分换成了沿"未受微扰"的运动的軌道对 $d\varphi$ 的积分。

在(a)的情况下,(1)中的积分是很寻常的,积分后可得

$$\delta\varphi=-\frac{2\pi\beta m}{M^2}=-\frac{2\pi\beta}{\alpha p}$$

[p 是(15,4)中的未受微扰的椭圆的参数]。在(б)的情况下,$r^2\delta U=\frac{\gamma}{r}$,由(15,5)求取 $\frac{1}{r}$,我們便得到

$$\delta\varphi=-\frac{6\pi\alpha\gamma m^2}{M^4}=-\frac{6\pi\gamma}{\alpha p^2}.$$

第四章　粒子碰撞

§16. 粒子的分裂

冲量与能量的守恒定律本身就已經可能在許多情况下作出一系列涉及各种力学过程性質的很重要的結論。在这里特别重要的是：这些性質完全不依賴于参加过程的粒子間的相互作用的具体类型。

我們先从一个粒子“自动”（卽沒有在外力作用下）分裂成两个“組成部分”（卽两个在分裂后就相互无关而各自运动的粒子）的过程开始。

这个过程在粒子（分裂前）为靜止的計算系統里观察它时看来是最簡單的了。依据冲量守恒定律，由于分裂而形成的两个粒子的冲量的和仍然等于零，卽粒子带着数量相同方向相反的冲量飞开，而冲量的共同的絕对值（用 p_0 表示）由能量守恒定律

$$E_{вн}=E_{1вн}+\frac{p_0^2}{2m_1}+E_{2вн}+\frac{p_0^2}{2m_2}$$

确定，其中 m_1 与 m_2 是粒子的質量，$E_{1вн}$ 与 $E_{2вн}$ 是它們各自的內能，而 $E_{вн}$ 是原来粒子（卽分裂粒子）的內能，我們用 ε 表示“分裂能”，卽內能差

$$\varepsilon=E_{вн}-E_{1вн}-E_{2вн} \tag{16,1}$$

（显然，要分裂可能，这个量应当是正的）。这时我們有

$$\varepsilon=\frac{p_0^2}{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)=\frac{p_0^2}{2m}, \tag{16,2}$$

p_0 卽由上式决定（m 是两个粒子的折合質量），而粒子的速度各为

$v_{10}=\frac{p_0}{m_1}$，$v_{20}=\frac{p_0}{m_2}$。

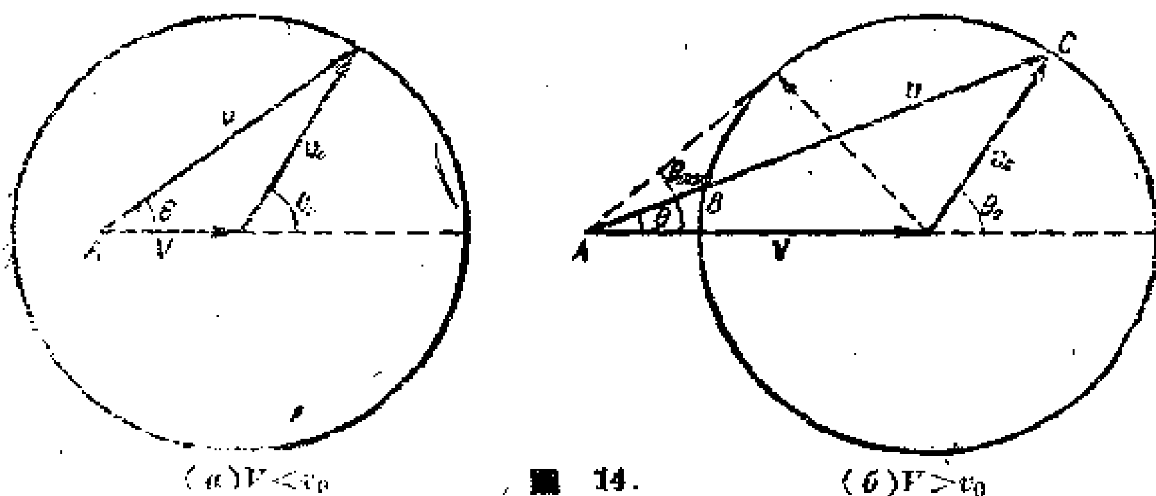
現在轉到分裂粒子以速度 V 运动的計算系統中去。通常称这一計算系統为实驗室系統(或 λ 系統)，它与"慣性中心系統"(或 μ 系統)不同，在慣性中心系統中，总冲量等于零。我們来研究新生粒子中的一个，讓 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}_0$ 分别表示在 λ 系統和 μ 系統中的速度。由显而易見的等式 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{V}+\boldsymbol{v}_0$ 或 $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V}=\boldsymbol{v}_0$ 我們可得

$$v^2+V^2-2vV\cos\theta=v_0^2, \tag{16,3}$$

其中 θ 是粒子相对于速度 $\boldsymbol{V}$ 方向的飞出角。在 λ 系統中，新生粒子的速度对它的飞出方向的依賴关系由这个方程式确定。此关系可藉圖 14 上之圖形用圖解法表示出来。速度 $\boldsymbol{v}$ 是由距离圓中心为 V 的 A 点引向半徑为 v_0 的圓周上某点[①]的向量給出。圖 14,a 和 $б$ 分别对应于 $V<v_0$ 和 $V>v_0$ 的两种情况。在第一种情况下粒子可以以任何角 θ 飞出。但在第二种情况下粒子只能以不超过 θ_{max} 的角 θ 飞出，θ_{max} 由等式

$$\sin\theta_{max}=\frac{v_0}{V} \tag{16,4}$$

确定(由 A 点所引的圓的切綫的方向)。



(a) $V<v_0$ 　　圖 14. 　　($б$) $V>v_0$

① 更准确地說，應該是半徑为 v_0 的圓球上的任一点，圖 14 上所画的圓是这个球的直徑断面。

在同一圖形上，L 系統和 C 系統中的飞出角 θ 和 θ_0 之間的关系也是显而易見的，这个关系由公式

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{v_0\sin\theta_0}{v_0\cos\theta_0+V}\tag{16,5}$$

給出。如果对 $\cos\theta_0$ 解这个方程式，那末經过簡單的变換后可得

$$\cos\theta_0=-\frac{V}{v_0}\sin^2\theta\pm\cos\theta\sqrt{1-\frac{V^2}{v_0^2}\sin^2\theta}.\tag{16,6}$$

当 $v_0>V$ 时，θ_0 和 θ 之間的关系是單值的，这由圖 14,a 也可看出。这时在公式(16,6)内的根号前应选正号(因当 $\theta=0$ 时 $\theta_0=0$)。如果 $v_0<V$，那么 θ_0 和 θ 之間的关系就不是單值的了：每一个 θ 的值对应于两个 θ_0 的值，这两个值与（圖 14,$б$ 上）圓心引向点 B 和点 C 的两个向量对应。在 (16,6) 中根号前两个符号与这种情况符合。

在物理应用中經常遇到不是一个，而是很多相同粒子分裂的情况，由于这个原因就發生了关于新生粒子按方向、能量等等分配的問題。这里我們将假設所有原来的粒子在空間的运动方向是杂乱无章的，卽平均說来是各向同性的。

在 C 系統內对这个問題的回答是輕而易举的：所有的分裂粒子（同样类型的）有同样的能量，它們按飞出方向的分布是各向同性的。后一論断和所做关于原来粒子动向的杂乱性的假設有关。这假設意味着在立体角元 do_0 中飞出的粒子数在总数中所佔比重与 do_0 的大小成正比，卽等于 $\frac{do_0}{4\pi}$，把 $do_0=2\pi\sin\theta_0 d\theta_0$ 代入后，我們将得到按角度 θ_0 的分布情况，卽

$$\frac{1}{2}\sin\theta_0\,d\theta_0。\tag{16,7}$$

在 L 系統里的分布情况可对这个表达式施行相应的变换来得到。例如：我們来确定在 L 系統中按动能的分布情况。将等式

$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{V}$ 平方可得

$$v^2=v_0^2+V^2+2v_0V\cos\theta_0,$$

由此
$$d\cos\theta_0=\frac{d(v^2)}{2v_0V}。$$

在此式中引入动能 $T=\frac{mv^2}{2}$（其中 m 是 m_1 或者 m_2 要看我們所研究是那一类型的新生粒子），再将它代入(16,7)我們得到所求的分布情况为

$$\frac{dT}{2mv_0V}。\tag{16,8}$$

动能可取从最小值 $T_{\min}=\frac{m}{2}(v_0-V)^2$ 到最大值 $T_{\max}=\frac{m}{2}(v_0+V)^2$ 之間的一切值，在这个范圍內，粒子按(16,8)均匀分布。

当一个粒子分裂为多于两个的部分时，冲量和能量的守恒定律仍然成立，自然，新生粒子的速度和方向較之分裂为两个的情况具有更大的任意性。其中可注意的是，在 u 系統中飞出粒子的能量絕沒有一个确定的值，可是，在这种情况下，任何新生粒子可能具有的能量有上限存在。

为了确定这个上限，除开一个給定的粒子（其質量为 m_1）以外，把所有新生粒子的集和看作是一个体系，用 $E'_{\text{вн}}$ 表示这个体系的“内能”。这时粒子 m_1 的动能按照公式(16,1)，(16,2)将是

$$T_{10}=\frac{p_0^2}{2m_1}=\frac{M-m_1}{M}(E_{\text{вн}}-E_{1\text{вн}}-E'_{\text{вн}})$$

（M 是原来粒子的質量）。显然，当 $E'_{\text{вн}}$ 为最小时，T_{10} 将有最大的可能值。为此，除粒子 m_1 以外的所有新生粒子应以同样的速度运动，这时 $E'_{\text{вн}}$ 不过是它們內能的和，而能量差 $E_{\text{вн}}-E_{1\text{вн}}-E'_{\text{вн}}$ 是分裂能。因此

$$(T_{10})_{\max}=\frac{M-m_1}{M}\varepsilon。\tag{16,9}$$

習　題

1．求在分裂成两个粒子时两个新生粒子的飞出角 θ_1, θ_2 之間的关系（在 L 系統中）。

解： 在 C 系統中两个粒子的飞出角以 $\theta_{10}=\pi-\theta_{20}$ 相联系。將 θ_{10} 簡以 θ_0 表之并运用公式(16,5)于两个粒子中的每一个，我們可写出

$$V+v_{10}\cos\theta_0=v_{10}\sin\theta_0\operatorname{ctg}\theta_1,$$

$$V-v_{20}\cos\theta_0=v_{20}\sin\theta_0\operatorname{ctg}\theta_2。$$

应当从这两个等式中消去 θ_0。为此我們先求出 $\cos\theta_0$ 和 $\sin\theta_0$，然后組成 $\cos^2\theta_0+\sin^2\theta_0=1$。考慮到 $\frac{v_{10}}{v_{20}}=\frac{m_2}{m_1}$ 并运用公式(16,2)，我們將求得下列方程：

$$\frac{m_2}{m_1}\sin^2\theta_2+\frac{m_1}{m_2}\sin^2\theta_1-2\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\theta_1+\theta_2)=$$

$$=\frac{2\varepsilon}{(m_1+m_2)V^2}\sin^2(\theta_1+\theta_2)。$$

2．試求在 L 系統中新生粒子按飞出方向分配的情况。

解： 当 $v_0>V$ 时將根号前带正号的(16,6)代入(16,7)，我們得到所求的分配情况为

$$\frac{\sin\theta\,d\theta}{2}\left[2\frac{V}{v_0}\cos\theta+\frac{1+\frac{V^2}{v_0^2}\cos 2\theta}{\sqrt{1-\frac{V^2}{v_0^2}\sin^2\theta}}\right]\quad(0\leqslant\theta\leqslant\pi)。$$

当 $v_0<V$ 时应当考慮到 θ_0 和 θ 的两个可能的关系。既然当 θ 增加时，与 θ 对应的 θ_0 的两个値中一个將增加，而另一个將減少，那么就应当取在(16,6)的根号前带两个符号的 $d\cos\theta_0$ 的表达式之差（而不是和），結果我們將得到：

$$\sin\theta\,d\theta\,\frac{1+\frac{V^2}{v_0^2}\cos 2\theta}{\sqrt{1-\frac{V^2}{v_0^2}\sin^2\theta}}\quad(0\leqslant\theta\leqslant\theta_{\max})。$$

3．試求在 L 系統內两个新生粒子飞出方向的夹角之値的可能范圍。

解： 角 θ 是由公式(16,5)（見習題1）決定的角的和 $\theta_1+\theta_2$；$\operatorname{tg}\theta$ 能最簡單地計算出来。研究所得表示式的極値將导出与相对量 V 以及 v_{10}、v_{20} 有关的 θ 可能値的范圍（为了确定起見，設 $v_{20}>v_{10}$）如下：

如果 $v_{10}<V<v_{20}$， 則 $0<\theta<\pi$；

如果 $V<v_{10}$， 則 $\pi-\theta_0<\theta<\pi$；

如果 $V>v_{20}$， 則 $0<\theta<\theta_0$，

此处之角 θ_0 的值由下式决定：

$$\sin\theta_0=\frac{V(v_{10}+v_{20})}{V^2+v_{10}v_{20}}。$$

§ 17. 粒子的彈性碰撞

如果两个粒子在碰撞后內部状态不發生改变，則此种碰撞称为彈性碰撞。与此相应，对这样的碰撞运用能量守恒定律时，可不考虑粒子的內能。

碰撞在两个粒子的慣性中心为靜止的計算系統（u 系統）里看来是最簡的了。像在上节一样，我們用指标 0 表示在这系統內的各个量之值。碰撞前粒子在 u 系統中的速度和它們在实驗室系統內的速度 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 之間的关系为

$$\boldsymbol{v}_{10}=\frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{v},\quad \boldsymbol{v}_{20}=-\frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{v},$$

其中 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2$[見(13,2)]。

由于冲量守恒定律，在碰撞以后两个粒子冲量的数值相等、方向相反，而由于能量守恒定律，冲量的絕对值也将是不变的。因此，在 u 系統里碰撞的結果是使得这两个粒子的速度的方向与以前相反而数值不变，如果用 $\boldsymbol{n}_0$ 表示在碰撞后粒子 m_1 的速度方向上的單位向量，那末在碰撞后两个粒子的速度（用一撇把它們区别出来）将是

$$\boldsymbol{v}'_{10}=\frac{m_2}{m_1+m_2}v\boldsymbol{n}_0,\quad \boldsymbol{v}'_{20}=-\frac{m_1}{m_1+m_2}v\boldsymbol{n}_0。\qquad(17,1)$$

为了回到实驗室計算系統，应該将慣性中心的速度 $\boldsymbol{V}$ 加到这些式子中去。于是，我們将得到碰撞后質点在 l 系統中的速度为

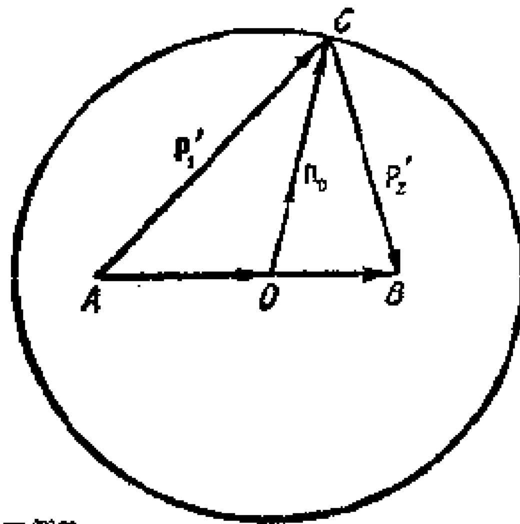
$$
\left.
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1' &= \frac{m_2}{m_1+m_2} v\boldsymbol{n}_0 + \frac{m_1\boldsymbol{v}_1+m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1+m_2}, \\
\boldsymbol{v}_2' &= -\frac{m_1}{m_1+m_2} v\boldsymbol{n}_0 + \frac{m_1\boldsymbol{v}_1+m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1+m_2}。
\end{aligned}
\right\} \tag{17,2}
$$

关于彈性碰撞，能量和冲量的守恒定律只能告訴我們这些。至于向量 $\boldsymbol{n}_0$ 的方向，那它是与粒子相互作用的規律和在碰撞时的相互位置有关的。

可以在几何上来解釋得到的結果。把速度換为冲量在这里是比較方便的，分別用 m_1 和 m_2 乘等式(17,2)可得

$$
\left.
\begin{aligned}
\boldsymbol{p}_1' &= mv\boldsymbol{n}_0 + \frac{m_1}{m_1+m_2}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2), \\
\boldsymbol{p}_2' &= -mv\boldsymbol{n}_0 + \frac{m_2}{m_1+m_2}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)
\end{aligned}
\right\} \tag{17,3}
$$

$\left(m=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\right.$ ——折合質量$\left.\right)$。作半徑为 mv 的圓，并像圖 15 那样作出圖来。如果單位向量 $\boldsymbol{n}_0$ 沿着 $\overrightarrow{OC}$ 的方向，那么向量 $\overrightarrow{AC}$ 和 $\overrightarrow{CB}$ 就給出相应的冲量 $\boldsymbol{p}_1'$ 和 $\boldsymbol{p}_2'$。在給定 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$ 的条件下，圓的半徑和点 A 与点 B 的位置是固定的，而点 C 在圓周上可以有任意的位置。



$\overrightarrow{OC}=m\boldsymbol{v}$

$\overrightarrow{AO}=\frac{m_1}{m_1+m_2}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)$

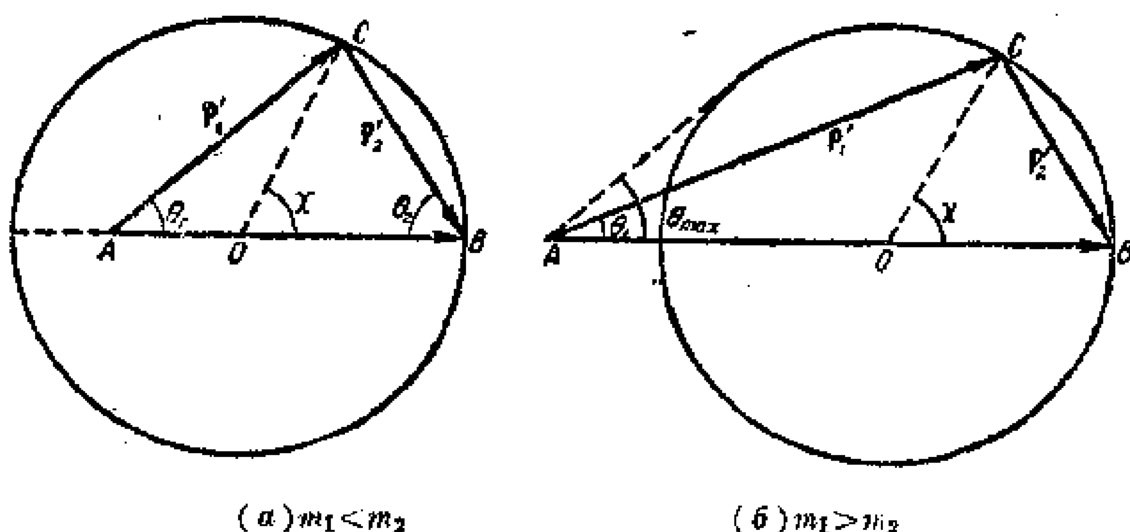
$\overrightarrow{OB}=\frac{m_2}{m_1+m_2}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)$

圖 15.

我們比較詳細地来研究一下碰撞前的粒子中有一个(假定它就是粒子 m_2)是处于靜止的情况。在这个情况下，長度 $OB=\frac{m_2}{m_1+m_2}p_1=mv$ 和半徑相等，卽 B 点在圓周上。

而向量 AB 和散射前第一个粒子的冲量 $\boldsymbol{p}_1$ 相等。这时 A 点是在圆内(如果 $m_1<m_2$)或在圆外(如果 $m_1>m_2$)。在圖 16,a 和 $б$ 上画出了与此相应的圖形。圖形上的角 θ_1 和 θ_2 是在碰撞后粒子相对于撞击方向($\boldsymbol{p}_1$ 方向)的偏角,用 χ 表示的中心角(它确定 $\boldsymbol{n}_0$ 的方向)是在慣性中心系統中第一个粒子的轉角。由圖可知,角 θ_1 和 θ_2 能够通过角 χ 用公式

$$\operatorname{tg}\theta_1=\frac{m_2\sin\chi}{m_1+m_2\cos\chi},\quad \theta_2=\frac{\pi-\chi}{2} \tag{17,4}$$



(a) $m_1<m_2$　　　($б$) $m_1>m_2$

$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{p}$; $\frac{AO}{OB}=\frac{m_1}{m_2}$。

圖 16.

表示。同样我們可写出用同一角 χ 确定碰撞后两粒子速度絕对值的公式

$$v_1'=\frac{\sqrt{m_1^2+m_2^2+2m_1m_2\cos\chi}}{m_1+m_2}v,\quad v_2'=\frac{2m_1v}{m_1+m_2}\sin\frac{\chi}{2}。 \tag{17,5}$$

$\theta_1+\theta_2$ 是在碰撞后两粒子飞出方向間的夹角,显然当 $m_1<m_2$ 时 $\theta_1+\theta_2>\frac{\pi}{2}$,当 $m_1>m_2$ 时 $\theta_1+\theta_2<\frac{\pi}{2}$。

如果碰撞后两粒子在一条直線上运动(正面撞击),則 χ 等于 π,即是說 C 点的位置在直徑上,并在 A 的左方(圖 16,a,这时 $\boldsymbol{p}_1'$

与 $\boldsymbol{p}_2'$ 互有相反的方向），或者在 A 和 O 之間（圖 16，б，这时 $\boldsymbol{p}_1'$、$\boldsymbol{p}_2'$ 有同一方向）。

在这种情况下，粒子在碰撞后的速度等于

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{v},\quad \boldsymbol{v}_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\boldsymbol{v}。\qquad (17,6)$$

这时 v_2' 的值是最大可能的值。因此原先靜止的粒子由于碰撞而可能得到的最大能量是

$$E'_{2\max} = \frac{m_2 v_2'^2{}_{\max}}{2} = \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}E_1,\qquad (17,7)$$

式中 $E_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}$ 是碰撞前运动着的粒子的初能量。

当 $m_1 < m_2$ 时，在第一粒子碰撞后的速度可有任何方向。但如果 $m_1 > m_2$，运动粒子的偏角則不能超过某一个最大值，此最大值对应于 C 点的那个位置（圖 16，б），当 C 在此位置时直綫 AC 和圓周相切。很明显，$\sin\theta_{1\max} = \frac{OC}{OA}$，或者

$$\sin\theta_{1\max} = \frac{m_2}{m_1}。\qquad (17,8)$$

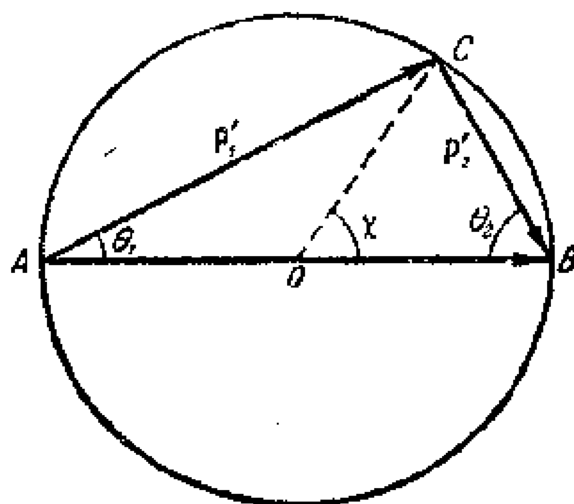


圖 17.

質量相同的两个粒子（其中之一最初靜止）的碰撞特別簡單。这时不只是 B 点，而且 A 点也位于圓周上（圖 17）。这时

$$\theta_1 = \frac{\chi}{2},\quad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2},\qquad (17,9)$$

$$v_1' = v\cos\frac{\chi}{2},\quad v_2' = v\sin\frac{\chi}{2}。\qquad (17,10)$$

必須指出，在碰撞后两粒子飞出的方向互成直角。

習 題

1. 在运动粒子 m_1 和靜止粒子 m_2 碰撞后，試在 l 系統中通过它們的偏角来表示它們的速度。

解： 由圖 16 可看出 $p_2'=2\cdot OB\cdot\cos\theta_2$ 或者

$$v_2'=2v\frac{m}{m_2}\cos\theta_2。$$

对于冲量 $p_1'=AC$ 我們有方程

$$OC^2=AO^2+p_1'^2-2AO\cdot p_1'\cos\theta_1$$

或者

$$\left(\frac{v_1'}{v}\right)^2-\frac{2mv_1'}{m_2v}\cos\theta_1+\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}=0。$$

由此，

$$\left(\frac{v_1'}{v}\right)=\frac{m_1}{m_1+m_2}\cos\theta_1\pm\frac{1}{m_1+m_2}\sqrt{m_2^2-m_1^2\sin^2\theta_1}$$

（当 $m_1>m_2$ 时，根号前两个符号都是可能的，而在 $m_2>m_1$ 时，只可能是＋号）。

§18. 粒子的散射

在上节中已經指出，完全确定两粒子碰撞的結果（确定角 χ）要求考慮到粒子互相作用的具体規律来解运动方程。

首先，我們按一般法則来研究一个等效的問題，这是一个質量为 m 的粒子在力心（位于粒子的慣性中心）不动的場 $U(r)$ 中偏轉的問題。

在 §14 中已經指出，粒子在中心場中的軌道，相对于通过軌道上离中心最近的点所作的直綫（圖 18 中的 OA）是对称的。因此軌道的两条漸近綫和这条直綫相交的角是一样的。如果用 φ_0 来表示这个角，那么由圖可見，粒子在它飞过中心附近以后的偏角是

$$\chi=|\pi-2\varphi_0|。\tag{18,1}$$

根据公式(14,7)，φ_0 角由下面积分来决定：

$$\varphi_0=\int_{r_{\min}}^{\infty}\frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m[E-U(r)]-\frac{M^2}{r^2}}},\tag{18,2}$$

这是从粒子离中心最近的位置到无穷远的位置来取积分。必須提醒一下，$r_{\min}$ 是根号里面表达式的根。

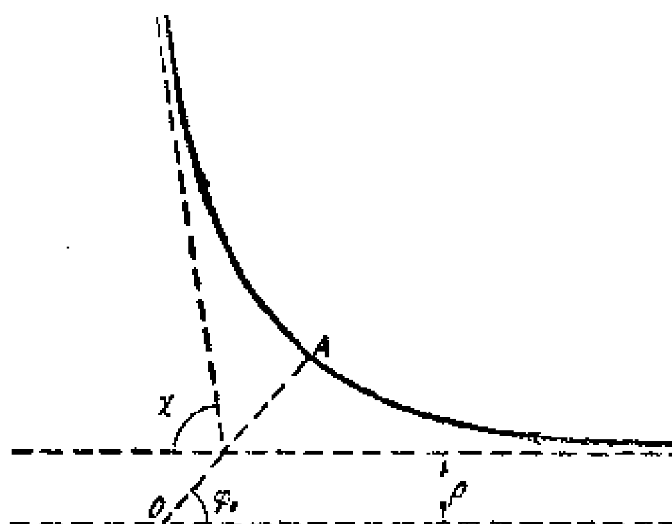


图 18.

在我們这里所討論的无限运动的情况下，采用粒子在无穷远处的速度 v_∞ 和所謂"瞄准距离" ρ 来代替常量 E 和 M 特別方便。"瞄准距离"是从中心向 v_∞ 方向所引垂直綫的長度，亦即这样的距离，如果力場不存在，則粒子以这样的距离从中心旁边經过。能量和矩按照下列式子通过这两个量表示：

$$E=\frac{mv_\infty^2}{2},\quad M=m\rho v_\infty,\tag{18,3}$$

而公式(18,2)采取

$$\varphi_0=\int_{r_{\min}}^{\infty}\frac{\rho\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}-\frac{2U}{mv_\infty^2}}}\tag{18,4}$$

的形式。它与(18,1)一起来决定 χ 对 ρ 的依賴关系。

在物理运用中一般必須遇到的不是一个粒子的偏离，而是落向散射中心的有相同速度的全同粒子所組成的整个粒子束的散射。在束内不同的粒子有着不同的"瞄准距离"，因而相应地也以不同的角度 χ 散射。我們用 dN 表示單位时間內在 χ 和 $\chi+d\chi$ 角

度内所散射的粒子数。这一数目本身不便于描述散射过程的特性，因为它依赖于入射粒子束的密度（与密度成正比）。所以我們引入关系式

$$d\sigma=\frac{dN}{n},\qquad(18,5)$$

其中 n 是在單位时間内通过垂直于束的單位截面积的粒子数（当然，我們假定粒子束在自己的整个截面上是均匀的）。这个比率有面积的因次，称为**散射的有效截面**。它完全由散射場的形式所决定，是散射过程的一个重要特性。

如果散射角是瞄准距离之單調下降函数，則 χ 和 ρ 間的关系是互为單値的。在这样的情况下，在角区間 χ 和 $\chi+d\chi$ 内散射的只是其瞄准距离在一定的区間 $\rho(\chi)$ 和 $\rho(\chi)+d\rho(\chi)$ 内的粒子。这种粒子的数目等于 n 与半徑为 ρ 和 $\rho+d\rho$ 的两圓周間环形面积的乘积，卽 $dN=2\pi\rho d\rho\cdot n$。所以有效截面为

$$d\sigma=2\pi\rho d\rho。\qquad(18,6)$$

为了找到有效截面对于散射角的依賴关系，只要把此式改写成

$$d\sigma=2\pi\rho(\chi)\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right|d\chi\qquad(18,7)$$

就足够了。这里取微商 $\frac{d\rho}{d\chi}$ 的絕对値是因为它可能是負値（像一般常有的情况）①。常常都是使 $d\sigma$ 不屬平面角元 $d\chi$，而屬立体角元 do。在两个張角为 χ 和 $\chi+d\chi$ 的圓錐体間的立体角是 $do=2\pi\sin\chi\,d\chi$。所以从(18,7)我們有

$$d\sigma=\frac{\rho(\chi)}{\sin\chi}\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right|do。\qquad(18,8)$$

当回到并非在不动的力的中心而是在其他最初静止的粒子上

① 如果函数 $\rho(\chi)$ 是多値的，那末显然应当对函数各分枝取这类表达式的和。

粒子束散射的实际問題时，我們可以說公式(18,7)决定惯性中心系統內有效截面对散射角的依賴关系。为了找到实驗室系統內有效截面对散射角的依賴关系，应当把这公式內的χ按照公式(17,4)通过θ来表示。这时入射粒子束的散射截面的表达式(χ通过θ_1表示)和最初靜止的粒子的表达式(χ通过θ_2表示)都能得到。

習 題

1. 試决定粒子在半徑为a的剛体球上散射(亦即相互作用的規律为当$r<a$时，$U=\infty$；当$r>a$时，$U=0$)的有效截面。

解： 因为在球外粒子自由运动，而进入球內一般是不可能的，那末軌道由相对于通过軌道与球的交点所引半徑对称分布的两条直綫組成(圖19)。由圖可見

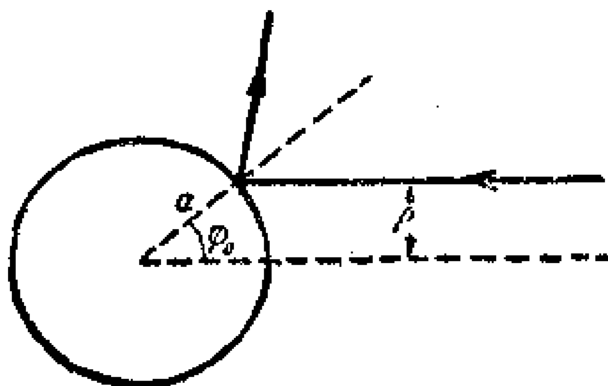


圖 19.

$$\rho=a\sin\varphi_0=a\sin\frac{\pi-\chi}{2}=a\frac{\cos\chi}{2}.$$

代入(18,7)或(18,8)即得

$$d\sigma=\frac{\pi a^2}{2}\sin\chi\,d\chi=\frac{a^2}{4}do, \tag{1}$$

亦即在u系統內散射是各向同性的。对全部立体角积分$d\sigma$就得到全截面$\sigma=\pi a^2$，这与"瞄准面积"是小球的截面积相符合，"瞄准面积"是粒子要散射就必須射于其上的面积。

为了过渡到$л$系統，应根据(17,4)把χ通过θ_1表示出。計算完全与§16習題2相类似[由于公式(17,4)与(16,5)在形式上相同]。当$m_1<m_2$(m_1是粒子的質量，m_2是小球的質量)时，我們便得到

$$d\sigma_1=\frac{a^2}{4}\left[2\frac{m_1}{m_2}\cos\theta_1+\frac{1+\frac{m_1^2}{m_2^2}\cos 2\theta_1}{\sqrt{1-\frac{m_1^2}{m_2^2}\sin^2\theta_1}}\right]do_1$$

$(do_1 = 2\pi \sin\theta_1\, d\theta_1)$。如果 $m_2 > m_1$，那末

$$d\sigma_1 = \frac{a^2}{2} \frac{1 + \frac{m_1^2}{m_2^2}\cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2}\sin^2\theta_1}} do_1 。 \quad (3)$$

当 $m_1 = m_2$ 时我們有

$$d\sigma_1 = a^2 |\cos\theta_1| do_1,$$

这也可直接用 $\chi = 2\theta_1$ [根据(17, 9)]代入(1)得出。

对最初靜止的小球我們总有 $\chi = \pi - 2\theta_2$，将之代入(1)則得

$$d\sigma_2 = a^2 |\cos\theta_2| do_2 。$$

2. 在同样的情况下，把有效截面表为散射粒子所損失的能量 ε 的函数。

解：粒子 m_1 所失去的能量与粒子 m_2 所得到的能量相同。根据 (17,5) 和(17,7)有

$$\varepsilon = E_2' = \frac{2m_1^2 m_2}{(m_1 + m_2)^2} v_\infty^2 \sin^2\frac{\chi}{2} = \varepsilon_{max} \sin^2\frac{\chi}{2},$$

由此

$$d\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon_{max} \sin\chi\, d\chi,$$

将此式代入習題1的式(1)中卽得

$$d\sigma = \pi a^2 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon_{max}} 。$$

在 ε 从零到 ε_{max} 的整个区間上散射粒子按 ε 值的分布是均匀的。

3. 在場 $U \infty r^{-n}$ 內散射时，有效截面是如何依賴于粒子的速度 v_∞ 的？

解：根据(10,3)，如果位能是 $k = -n$ 級的齐次函数，那末对于类似的軌道，$\rho \infty v^{-2/n}$ 或

$$\rho = v_\infty^{-2/n} f(\chi)$$

(类似軌道偏角 χ 是相同的)。代入(18,6)卽求得

$$d\sigma \infty v_\infty^{-4/n} do 。$$

4. 試确定在粒子向場 $U = -\frac{\alpha}{r^2}$ 之中心"降落"时的有效截面。

解：向中心"降落"的是滿足条件 $2\alpha > m\rho^2 v_\infty^2$ [見(14,11)]，亦卽其瞄准距离不超过 $\rho_{max} = \sqrt{\frac{2\alpha}{mv_\infty^2}}$ 的粒子。因此所求的有效截面

$$\sigma = \pi\rho_{max}^2 = \frac{2\pi\alpha}{mv_\infty^2} 。$$

5. 同上題，但場 $U=-\frac{\alpha}{r^n}$ $(n>2, \alpha>0)$。

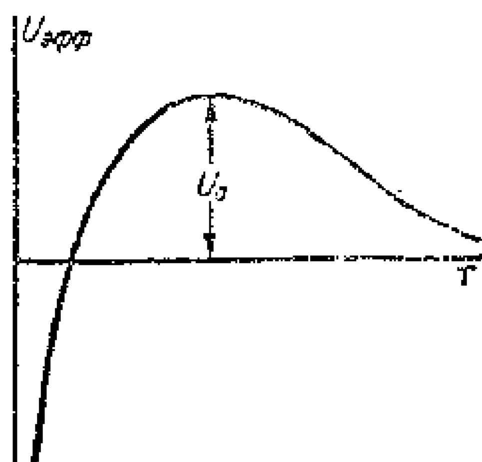


圖 20.

解： 有效位能

$$U_{эфф}=\frac{m\rho^2v_\infty^2}{2r^2}-\frac{\alpha}{r^n}$$

对 r 的依賴关系有圖 20 的形式，其上的最大值

$$(U_{эфф})_{max}=U_0=\frac{(n-2)\alpha}{2}\left(\frac{m\rho^2v_\infty^2}{\alpha n}\right)^{\frac{n}{n-2}}。$$

向中心"降落"的是具 $U_0<E$ 的粒子。从条件 $U_0=E$ 来确定 ρ_{max}，我們將得到

$$\sigma=\pi n(n-2)^{\frac{2-n}{n}}\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^{\frac{2}{n}}。$$

6. 試确定粒子向球表面降落时的有效截面，設球体（質量为 m_2，半徑为 R）按牛頓定律吸引粒子（質量为 m_1）。

解： 落到球面的条件为不等式 $r_{min}<R$，式中 r_{min} 是粒子軌道上离球心最近的点。ρ 的最大許可値决定于条件 $r_{min}=R$，这与方程 $U_{эфф}(R)=E$ 或 $\frac{m_1v_\infty^2\rho_{max}^2}{2R^2}-\frac{\alpha}{R}=\frac{m_1v_\infty^2}{2}$ 的解是一致的，而且 $\alpha=\gamma m_1m_2$（γ 是引力常数），我們認为 $m_2\gg m_1$，并假定 $m\approx m_1$。由此求得 ρ_{max}^2 后即得

$$\sigma=\pi R^2\left(1+\frac{2\gamma m_2}{Rv_\infty^2}\right),$$

当 $v_\infty\to\infty$ 时，自然地，有效截面趋近于球的几何截面。

7. 試按照給定的有效截面对在給定的能量 E 时的散射角的依賴关系反过来求散射場 $U(r)$ 的形式，假定 $U(r)$ 是 r 的單調下降函数（吸引場），而且 $U(0)>E$，$U(\infty)=0$（О. Б. 飞尔薩夫，1953）。

解： 按散射角积分 $d\sigma$ 依公式

$$\int_\chi^\pi\frac{d\sigma}{d\chi}d\chi=\pi\rho^2 \tag{1}$$

决定出"瞄准距离"的平方，因而函数 $\rho(\chi)$ [以及 $\chi(\rho)$] 也可看作是給定的。

引入符号

$$s=\frac{1}{r},\quad x=\frac{1}{\rho^2},\quad w=\sqrt{1-\frac{U}{E}}。 \tag{2}$$

这时把公式 (18,1)，(18,2) 寫成

$$\frac{\pi-\chi(x)}{2}=\int_0^{s_0}\frac{ds}{\sqrt{xw^2-s^2}},\tag{3}$$

式中 $s_0(x)$ 是方程 $xw^2(s_0)-s_0^2=0$ 的根。

方程（3）是函数 $w(s)$ 的积分方程，它可以用类似于 § 12 中所应用的方法来解。将（3）的两边都除以 $\sqrt{\alpha-x}$ 并对 dx 从零到 α 积分，即可找到

$$\int_0^\alpha\frac{\pi-\chi(x)}{2}\frac{dx}{\sqrt{\alpha-x}}=\int_0^\alpha\int_0^{s_0(x)}\frac{ds\,dx}{\sqrt{(xw^2-s^2)(\alpha-x)}}=$$

$$=\int_0^{s_0(\alpha)}\int_{x(s_0)}^{\alpha}\frac{dx\,ds}{\sqrt{(xw^2-s^2)(\alpha-x)}}=\pi\int_0^{s_0(\alpha)}\frac{ds}{w},$$

用分部积分法积分等式左边，上式变为

$$\pi\sqrt{\alpha}-\int_0^\alpha\sqrt{\alpha-x}\frac{d\chi}{dx}dx=\pi\int_0^{s_0(\alpha)}\frac{ds}{w}。$$

把已得的关系式对 α 微分，然后将 $s_0(\alpha)$ 简写为 s，与此相应将 α 换成 $\frac{s^2}{w^2}$，将等式写成微分形式，则得到

$$\pi d\left(\frac{s}{w}\right)-\frac{1}{2}d\left(\frac{s^2}{w^2}\right)\int_0^{\frac{s^2}{w^2}}\frac{\chi'(x)\,dx}{\sqrt{\frac{s^2}{w^2}-x}}=\frac{\pi}{w}ds$$

或

$$\pi d\ln w=d\left(\frac{s}{w}\right)\int_0^{\frac{s^2}{w^2}}\frac{\chi'(x)\,dx}{\sqrt{\frac{s^2}{w^2}-x}}。$$

这方程可直接积分，而且在右边应当改变对 dx 和对 $d\left(\frac{s}{w}\right)$ 积分的顺序。考虑到当 $s=0$（即 $r\to\infty$）时应当有 $w=1$（即 $U=0$），并换回原始的变量 r 和 ρ，则得到（两个等效形式的）最終的結果：

$$w=\exp\left\{-\frac{1}{\pi}\int_{rw}^{\infty}\operatorname{argch}\frac{\rho}{rw}\frac{d\chi}{d\rho}d\rho\right\}=\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_{rw}^{\infty}\frac{\chi(\rho)\,d\rho}{\sqrt{\rho^2-r^2w^2}}\right\}。\tag{4}$$

对于一切 $r>r_{\min}$，即在具有給定能量 E 的散射粒子实际上所通过的 r 的区間内，这一公式以不明显的形式决定函数关系 $w(r)$［因而也决定 $U(r)$］。

§ 19. 盧瑟福公式

前面所得公式的重要应用之一乃是研究带电粒子在庫倫場内的散射。

在(18,4)中假設 $U=\frac{\alpha}{r}$，进行簡單的积分，我們便得到

$$\varphi_0=\arccos\frac{\frac{\alpha}{mv_\infty^2\rho}}{\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2\rho}\right)^2}},$$

由此

$$\rho^2=\frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4}\operatorname{tg}^2\varphi_0,$$

按(17,1)引入 $\varphi_0=\frac{(\pi-\chi)}{2}$，則上式成为

$$\rho^2=\frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4}\operatorname{ctg}^2\frac{\chi}{2}。\tag{19,1}$$

对χ来微分此式并代入(18,7)或者(18,8)，我們便得到

$$d\sigma=\pi\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2\frac{\cos\frac{\chi}{2}}{\sin^3\frac{\chi}{2}}d\chi\tag{19,2}$$

或者

$$d\sigma=\left(\frac{\alpha}{2mv_\infty^2}\right)^2\frac{do}{\sin^4\frac{\chi}{2}}。\tag{19,3}$$

这就是所謂**盧瑟福公式**。应該指出，有效截面不依賴于α的符号，因而，所得的結果相对于斥力或引力的庫倫場而言都一样。

公式(19,3)給出在相互碰撞的粒子的慣性中心为靜止的計算系統中的有效截面。依靠公式(17,4)可以进行到实驗室坐标系的变换。对于原先靜止的粒子，將 $\chi=\pi-2\theta_2$ 代入(19,2)，我們便得到

$$d\sigma_2=2\pi\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2\frac{\sin\theta_2}{\cos^3\theta_2}d\theta_2=\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2\frac{do_2}{\cos^3\theta_2}。\tag{19,4}$$

但对于入射粒子来說，变換在一般的情况下会導出非常复杂的公式。我們只指出两个特殊的情况。

如果散射粒子的質量 m_2 較之被散射粒子的質量 m_1 大很多，那么 $\chi\approx\theta_1$，而 $m\approx m_1$，所以

$$d\sigma_1=\left(\frac{\alpha}{4E_1}\right)^2\frac{do_1}{\sin^4\frac{\theta_1}{2}},\qquad(19,5)$$

式中 $E_1=m_1\frac{v_\infty^2}{2}$ 是入射粒子的能量。

如果两种粒子的質量相等$\left(m_1=m_2,\ m=\frac{m_1}{2}\right)$，那么按照(17,9)，$\chi=2\theta_1$，代入(19,2)卽得

$$d\sigma_1=2\pi\left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2\frac{\cos\theta_1}{\sin^3\theta_1}d\theta_1=\left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2\frac{\cos\theta_1}{\sin^4\theta_1}do_1。\quad(19,6)$$

如果两种粒子不仅質量相等，而且这些粒子完全相同，那么在散射后把原来运动着的粒子和原来是靜止的粒子区別开就沒有意义了。把 $d\sigma_1$ 和 $d\sigma_2$ 相加再把 θ_1 和 θ_2 換成共同的值 θ，我們就得到所有粒子的共同有效截面

$$d\sigma=\left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2\left(\frac{1}{\sin^4\theta}+\frac{1}{\cos^4\theta}\right)\cos\theta\,do。\qquad(19,7)$$

我們再重新回到普遍的公式 (19,2)，用它来确定散射粒子按損失能量的分配，这些能量是由于碰撞而为散射粒子所失掉的。在被散射粒子質量 m_1 和散射粒子質量 m_2 之間任意比例的情况下，散射粒子所获得的速度在 u 系統中通过散射角表示为

$$v_2'=\frac{2m_1}{m_1+m_2}v_\infty\sin\frac{\chi}{2}$$

[見(17,5)]。相应地，这粒子所获得的也就是粒子 m_1 所失去的能量等于

$$\varepsilon=\frac{m_2v_2'^2}{2}=\frac{2m^2}{m_2}v_\infty^2\sin^2\frac{\chi}{2}。$$

从这里用 ε 来表 $\sin\frac{\chi}{2}$ 再代入(19,2)，我們便得到

$$d\sigma = 2\pi \frac{\alpha^2}{m_2 v_\infty^2} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2} \tag{19,8}$$

当其确定有效截面作为损失能量ε的函数时，这公式回答所提出的問題；損失能量在这情况下可以有从零到 $\varepsilon_{max} = \dfrac{2m^2 v_\infty^2}{m_2}$ 的一切值。

習　題

1．試求在 $U = \dfrac{\alpha}{r^2}$ $(\alpha > 0)$ 的場內散射的有效截面。

解： 偏角

$$\chi = \pi\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{2\alpha}{m\rho^2 v_\infty^2}}}\right]。$$

有效截面
$$d\sigma = \frac{2\pi^2 \alpha}{m v_\infty^2} \cdot \frac{\pi - \chi}{\chi^2 (2\pi - \chi)^2} \cdot \frac{do}{\sin\chi}。$$

2．試求被半徑为 a 和"深度"为 U_0 的球形位能阱（即当 $r > a$ 时場 $U = 0$，当 $r < a$ 时 $U = -U_0$）散射的有效截面。

解：当粒子进入位能阱和从位能阱中出来的时候，它的直綫軌道就被"折射"了。按照附于 § 7 的習題，入射角 α 和折射角 β（圖 21）由以下关系式相联系着：

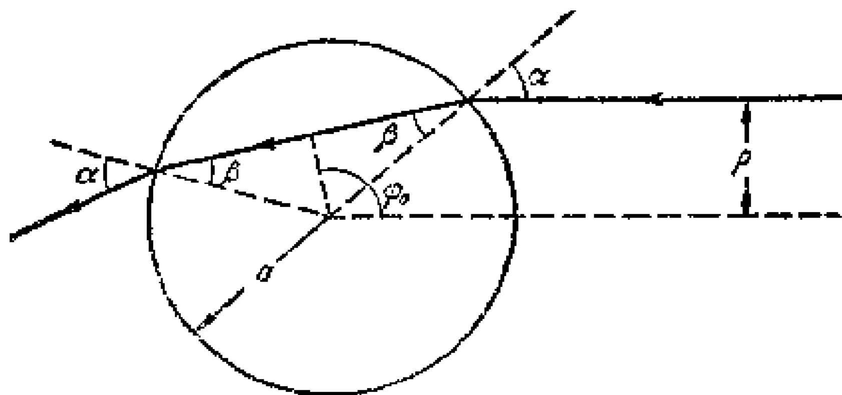


圖 21.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n, \quad n = \sqrt{1 + \frac{2U_0}{m v_\infty^2}}。$$

偏角为 $\chi = 2(\alpha - \beta)$。因此有

$$\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\chi}{2}\right)}{\sin\alpha}=\cos\frac{\chi}{2}-\operatorname{ctg}\alpha\sin\frac{\chi}{2}=\frac{1}{n}。$$

从这个等式以及由圖上明显可見的关系式

$$a\sin\alpha=\rho$$

中消去 α，我們就得到 ρ 和 χ 之間的关系为

$$\rho^2=a^2\frac{n^2\sin^2\frac{\chi}{2}}{n^2+1-2n\cos\frac{\chi}{2}}。$$

最后，微分这等式，我們便得到有效截面

$$d\sigma=\frac{a^2n^2}{4\cos\frac{\chi}{2}}\frac{\left(n\cos\frac{\chi}{2}-1\right)\left(n-\cos\frac{\chi}{2}\right)}{\left(1+n^2-2n\cos\frac{\chi}{2}\right)^2}do。$$

角 χ 变化的区間是从零(当 $\rho=0$)到 χ_{max}(当 $\rho=a$)，χ_{max} 由下式确定：

$$\cos\frac{\chi_{max}}{2}=\frac{1}{n}。$$

由沿圓錐 $\chi<\chi_{max}$ 内全部角度对 $d\sigma$ 的积分所得到的全有效截面，自然等于几何截面的面积 πa^2。

§20. 微偏角散射

如果研究只是在很大瞄准距离上的碰撞，那里場 U 是很弱的，因而偏角相应地也是很微小的，則有效截面的計算大大地簡化。这时計算可以立刻在实驗室計算系統里进行，而不引入慣性中心系統。

选擇 x 軸沿被散射粒子(粒子 m_1)最初的冲量方向，而选擇平面 xy 在散射平面内。用 p_1' 来表示散射后粒子的冲量，我們有显而易見的等式

$$\sin\theta_1=\frac{p_{1y}'}{p_1'}。$$

对于微小偏离的情况可以近似地用 θ_1 来代替 $\sin\theta_1$，而在分母中用起始冲量 $p_1=m_1v_\infty$ 来代替 p_1'，則有

$$\theta_1 \approx \frac{p'_{1y}}{m_1 v_\infty}。 \tag{20,1}$$

其次，既然 $\dot{p}_y = F_y$，那么沿 y 軸冲量的总的增量为

$$p'_{1y} = \int_{-\infty}^{\infty} F_y dt。 \tag{20,2}$$

同时力 $$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{dU}{dr}\frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{dU}{dr}\frac{y}{r}。$$

既然 (20,2) 的积分已經含有小量 U，那么在計算时以同样的近似可以認为粒子完全不偏离自己起初的路徑，就是說作匀速（以速度 v_∞）直綫（沿直綫 $y=\rho$）运动。和这些相适应我們假設在 (20,2) 中

$$F_y = -\frac{dU}{dr}\frac{\rho}{r},\quad dt = \frac{dx}{v_\infty},$$

于是得到 $$p'_{1y} = -\frac{\rho}{v_\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dU}{dr}\frac{dx}{r}。$$

最后，我們把对 dx 的积分轉换为对 dr 的积分。既然对于直綫路徑 $r^2 = x^2 + \rho^2$，那么当 x 从 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时，r 就从 ∞ 变到 ρ，然而又从 ρ 变到 ∞。因此对 dx 的积分就轉变为对 dr 从 ρ 到 ∞ 的积分的两倍，而且 dx 被代换如下：

$$dx = \frac{rdr}{\sqrt{r^2-\rho^2}}。$$

对于散射角 (20,1) 我們最后得到以下的表达式①：

$$\theta_1 = -\frac{2\rho}{m_1 v_\infty^2}\int_\rho^\infty \frac{dU}{dr}\frac{dr}{\sqrt{r^2-\rho^2}}, \tag{20,3}$$

此式即确定在微小偏离情况下所要求的 θ_1 对 ρ 的依賴关系。散

① 如果进行在慣性中心系統中所述的全部推导，那我們对于 χ 将得到同样的表达式，而且 m_1 被 m 代替，这是和下列事实相适应的：微小角 θ_1 和 χ 应該按 (17,4) 以关系式

$$\theta_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\chi$$

相联系。

射的有效截面(在 $\mathcal{L}$ 系統里)按照和(18,8)(其中以 θ_1 代替 χ)同样的公式可求得，而且 $\sin\theta_1$ 在这里同样可以用 θ_1 来代替：

$$d\sigma=\left|\frac{d\rho}{d\theta_1}\right|\frac{\rho(\theta_1)}{\theta_1}do_1。\tag{20,4}$$

習　題

1．从公式(18,4)推出公式(20,3)。

解： 为了在下面能避免伪發散积分，我們把公式(18,4)写成

$$\varphi_0=-\frac{\partial}{\partial\rho}\int_{r_{\min}}^{R}\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}-\frac{2U}{mv_\infty^2}}\,dr,$$

而且我們写大的有限的量 R 作为上限是想以后过渡到極限 $R\to\infty$。由于 U 很小，我們把根号按 U 的方次展开，而 $r_{\min}$ 近似地用 ρ 来代替：

$$\varphi_0=\int_\rho^R\frac{\rho\,dr}{r^2\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}}}+\frac{\partial}{\partial\rho}\int_\rho^\infty\frac{U(r)\,dr}{mv_\infty^2\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}}}。$$

在过渡到極限 $R\to\infty$ 以后，第一个积分等于 $\frac{\pi}{2}$。預先分部地改变一下第二項积分，我們就得到和公式(20,3)等效的表达式

$$\chi=\pi-2\varphi_0=2\frac{\partial}{\partial\rho}\int_\rho^\infty\frac{\sqrt{r^2-\rho^2}}{mv_\infty^2}\frac{dU}{dr}dr=-\frac{2\rho}{mv_\infty^2}\int_\rho^\infty\frac{dU}{dr}\frac{dr}{\sqrt{r^2-\rho^2}}。$$

2．求在 $U=\frac{\alpha}{r^n}$ $(n>0)$ 的場内微偏角散射的有效截面。

解： 按照(20,3)式我們有

$$\theta_1=\frac{2\rho\alpha n}{m_1v_\infty^2}\int_\rho^\infty\frac{dr}{r^{n+1}\sqrt{r^2-\rho^2}}。$$

施行代换 $\frac{\rho^2}{r^2}=u$，积分遂变为欧勒积分，通过 Γ 函数来表示，則

$$\theta_1=\frac{2\alpha\sqrt{\pi}}{m_1v_\infty^2\rho^n}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}。$$

从这里通过 θ_1 来表示 ρ，再代入(20,4)內我們便得到

$$d\sigma=\frac{1}{n}\left[\frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{\alpha}{m_1v_\infty^2}\right]^{\frac{2}{n}}\theta_1^{-2\left(1+\frac{1}{n}\right)}do_1。$$

第五章 微振动

§21. 一維自由振动

很常見的一种力学体系的运动类型是体系在其稳定平衡位置周圍进行的所謂微振动。我們从体系只有一个自由度的最簡單的情况开始来研究这些运动。

体系位能 $U(q)$ 具有最小值时的位置对应于稳定平衡，对这个位置的偏离就引起力圖使体系返回原状态的力 dU/dq。我們用 q_0 来表示广义坐标在平衡位置的值。在对平衡位置的偏离为很小的情况下，将差 $U(q)-U(q_0)$ 按 $q-q_0$ 的方次来展开所得的展开式中保留不为零的第一項就已經足够了。在一般情况下，这是二次方的項

$$U(q)-U(q_0)\approx\frac{k}{2}(q-q_0)^2,$$

式中 k 是正系数[二次导数 $U''(q)$ 在 $q=q_0$ 时之值]。以后我們計算位能将从它的最小值算起[即設 $U(q_0)=0$]，引入

$$x=q-q_0 \tag{21,1}$$

表示坐标对平衡位置值的偏离。这样一来，

$$U(x)=\frac{kx^2}{2}。 \tag{21,2}$$

具有一个自由度的体系的动能在一般情况下是

$$\frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2=\frac{1}{2}a(q)\dot{x}^2。$$

在同样的近似情况下，对于函数 $a(q)$ 我們簡以它在 $q=q_0$ 时的值

来代替就可以了。为了簡單起見，引入記号[1]

$$a(q_0)=m,$$

我們便得到做一維微振动的体系[2]的拉格朗日函数表示式：

$$L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-\frac{kx^2}{2}。\tag{21,3}$$

对应于这个函数的运动方程是

$$m\ddot{x}+kx=0,\tag{21,4}$$

或者

$$\ddot{x}+\omega^2x=0,\tag{21,5}$$

这里我們采用了記号

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}。\tag{21,6}$$

綫性微分方程 (21,5) 的两个独立解是 $\cos\omega t$ 和 $\sin\omega t$，所以它的普遍解是

$$x=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t。\tag{21,7}$$

这个表达式也可以写成

$$x=a\cos(\omega t+\alpha)。\tag{21,8}$$

既然 $\cos(\omega t+\alpha)=\cos\omega t\cos\alpha-\sin\omega t\sin\alpha$，那么和 (21,7) 比较就表明，任意常数 a 和 α 与常数 c_1 和 c_2 由下列关系式联系：

$$a=\sqrt{c_1^2+c_2^2},\quad \operatorname{tg}\alpha=-\frac{c_2}{c_1}。\tag{21,9}$$

可見，体系在稳定平稳位置附近作諧和振动。在(21,8)中周期性因子前的系数 a 称为振动的**振幅**，而余弦的幅角称为振动的**位相**，α 是位相的初值，它显然依赖于时間計算起点的选择。量 ω 称为振动的**循环頻率**，不过在理論物理中通常簡称它为**頻率**，我們以后也將这样称它。

頻率是和运动起始条件无关的振动的基本特征量。按公式

[1] 然而我們着重指出，只有在 x 是粒子的笛卡尔坐标时，数量 m 才和質量相合。

[2] 这样的体系常常称为一維振子。

(21,6)它完全由力学体系本身的性質所决定。但是应該指出，頻率的这个性質，是和我們預先假定的振动的微弱性相联系的。当提高近似程度时，这个性質就不存在了。从数学观点上来看，頻率的这个性質是和位能对坐标的二次函数关系相联系的①。

作微振动的体系的能量是

$$E=\frac{m\dot{x}^2}{2}+\frac{kx^2}{2}=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\omega^2x^2),$$

把(21,8)代入此式：

$$E=\frac{1}{2}m\omega^2a^2。\tag{21,10}$$

能量和振幅的平方成正比。

振动体系的坐标对时間的依賴关系表为下面复数表示式的实数部分往往比較方便：

$$x=\mathrm{Re}\{Ae^{i\omega t}\},\tag{21,11}$$

其中 A 是复常数，如果把它写成

$$A=ae^{i\alpha},\tag{21,12}$$

则我們又回到式(21,8)了。常数 A 称为**复数振幅**，它的模数就是通常的振幅，而幅角就是初相。

* 在数学上，对指数因子进行运算比对三角函数因子进行运算更簡單，因为对前者微分并不改变它們的形式。当我們只进行綫性运算（相加、乘以常系数、微分、积分）时，一般可以不写出要取实数部分的記号，而只在最后的計算結果中取实数部分。

習　題

1. 試用坐标和速度的起始值 x_0 和 v_0 表示振动的振幅和初相。

答：
$$a=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}},\quad \operatorname{tg}\alpha=-\frac{v_0}{\omega x_0}。$$

① 如果函数 $U(x)$ 在 $x=0$ 处是数量級更高的極小值，即 $U\backsim x^n$, $n>2$（見§11習題2, a），那么便沒有这种性質了。

2. 試求由不同同位素原子所組成的双原子分子振动频率 ω 和 ω' 的比值，設原子的質量分別等于 m_1, m_2 和 m_1', m_2'。

解：既然同位素的原子以同样方式相互作用，所以 $k=k'$。折合質量則起在分子动能里的系数 m 的作用。因此按照 (21,6) 求得

$$\frac{\omega'}{\omega}=\sqrt{\frac{m_1m_2(m_1'+m_2')}{m_1'm_2'(m_1+m_2)}}。$$

3. 試求能够沿直綫运动并固定在彈簧一端的質点振动的频率。設質点的質量为 m，彈簧的另一端固定于距离直綫为 l 的 A 点（圖 22）。彈簧長度为 l 时承受力 F。

解：彈簧的位能（准确到更高級的小量）等于力 F 乘上彈簧的伸長 δl。当 $x\ll l$ 时，

$$\delta l=\sqrt{l^2+x^2}-l\approx\frac{x^2}{2l},$$

所以 $U=Fx^2/2l$。既然动能是 $\frac{m\dot{x}^2}{2}$，因此

$$\omega=\sqrt{\frac{F}{ml}}。$$

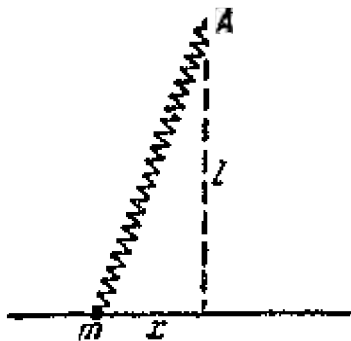


圖 22.

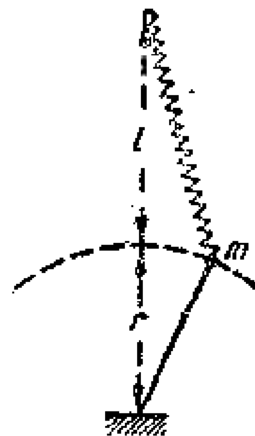


圖 23.

4. 同上題，設質点 m 沿着半徑为 r 的圓周运动（圖 23）。

解：在这种情况下，彈簧的伸長（当 $\varphi\ll 1$ 时）

$$\delta l=\sqrt{r^2+(l+r)^2-2r(l+r)\cos\varphi}-l\approx\frac{r(l+r)}{2l}\varphi^2。$$

动能 $T=\frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2$。由此频率

$$\omega=\sqrt{\frac{F(r+l)}{rlm}}。$$

5. 試求圖2所示的單擺振动的頻率，設單擺的悬点（有質量 m_1）可在水平方向上运动。

解：当 $\varphi\ll1$ 时，从 §14 習題 3 中所得到的公式，我們可以求得

$$T=\frac{m_1m_2l^2}{2(m_1+m_2)}\dot\varphi^2,\quad U=\frac{m_2gl}{2}\varphi^2。$$

由此

$$\omega=\sqrt{\frac{g(m_1+m_2)}{m_1l}}。$$

6. 已知沿曲綫（在重力場内）摆动时，頻率和振幅无关，試求該曲綫之形状。

解：这样的曲綫将能滿足所提出的条件，如果沿該曲綫运动質点的位能是 $U=ks^2/2$，式中 s 是从平衡位置算起的弧長。在这种情况下动能是 $T=m\dot s^2/2$（m 是質点的質量），振动頻率是 $\omega=\sqrt{k/m}$，它将不依賴于 s 的初值。

但在重力場内 $U=mgy$，式中 y 是竖直坐标。因此有 $ks^2/2=mgy$ 或

$$y=\frac{\omega^2}{2g}s^2。$$

另一方面，$ds^2=dx^2+dy^2$，由此

$$x=\int\sqrt{\left(\frac{ds}{dy}\right)^2-1},\quad dy=\int\sqrt{\frac{g}{2\omega^2y}-1}\,dy。$$

作代换

$$y=\frac{g}{4\omega^2}(1-\cos\xi)$$

后，积分很容易进行。这时我們可得到

$$x=\frac{g}{4\omega^2}(\xi+\sin\xi)。$$

这两个等式以参数形式确定我們所要求的曲綫，这曲綫乃是旋輪綫。

§ 22. 强迫振动

我們現在来研究受某种可变外場作用的体系里的振动，为了区别于我們在前一节所研究过的所謂**自由**振动，这种振动称为**强迫振动**。既然仍旧假定振动是微弱的，因而也就意味着，外場同样是十分弱的，不然它将引起过大的位移 x。

在此情况下，除了固有位能 $\frac{1}{2}kx^2$ 外，体系还具有和外場作用相联系的位能 $U_e(x, t)$。把这补充項按微小量 x 的方次展成級数則得

$$U_e(x, t) \cong U_e(0, t) + x \left.\frac{\partial U_e}{\partial x}\right|_{x=0}。$$

第一项只是时間的函数，所以在拉格朗日函数中这項可以略去（作为另外某一时間的函数对时間的全微商）。在第二項中，$-\partial U_e/\partial x$ 是作用在处于平衡位置的体系上的外“力”，也是給定的时間的函数，我們把它表为 $F(t)$。这样，在位能里就出現一項 $-xF(t)$，因而体系的拉格朗日函数是

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + xF(t)。\qquad (22,1)$$

对应的运动方程是

$$m\ddot{x} + kx = F(t)$$

或

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m} F(t), \qquad (22,2)$$

这里，我們再次引入了自由振动的頻率 ω。

大家知道，非齐次常系数綫性微分方程的一般解是两个表达式的和：$x = x_0 + x_1$，其中 x_0 是齐次方程式的一般解，而 x_1 是非齐次方程式的特殊积分。在我們現在的情况下，x_0 就是在前节里已經研究过的自由振动。

我們来研究特别有益的一种情况，就是当强迫力也是具有某种頻率 γ 的簡單的时間的周期函数：

$$F(t) = f\cos(\gamma t + \beta)。\qquad (22,3)$$

我們来寻找形如 $x_1 = b\cos(\gamma t + \beta)$ 的方程 (22,2) 的特殊积分，它具有同样的周期性因子。代入方程便得到 $b = f/m(\omega^2 - \gamma^2)$，再加上齐次方程式的解，我們便得到普遍积分为

$$x=a\cos(\omega t+\alpha)+\frac{f}{m(\omega^2-\gamma^2)}\cos(\gamma t+\beta), \qquad (22,4)$$

任意常数 a 和 α 由起始条件决定.

由此可見,在周期性的强迫力作用下,体系的运动是两个振动的合成,一个振动的頻率是体系的固有頻率 ω,而另一个振动的頻率是强迫力的頻率 γ。

解 (22,4) 不适用于所謂共振的情况,共振时强迫力的頻率和体系的固有頻率相同。为了求得在这种情况下运动方程的一般解,我們把式(22,4)改写如下(其中常数的表示法都經过适当改变):

$$x=a\cos(\omega t+\alpha)+\frac{f}{m(\omega^2-\gamma^2)}[\cos(\gamma t+\beta)-\cos(\omega t+\beta)]。$$

当 $\gamma\to\omega$ 时第二項就成为形如 $0/0$ 的不定式. 按拉比达法則来定这个不定式,我們得到

$$x=a\cos(\omega t+\alpha)+\frac{f}{2m\omega}t\sin(\omega t+\beta)。 \qquad (22,5)$$

由此可見,在共振的情况下振动的振幅随时間綫性地增大(直到振动不再是微弱的,而上述一切理論已不再适用时为止)。

我們再来研究当接近共振时,即当 $\gamma=\omega+\varepsilon$ 时(其中 ε 是一个小量)微振动的情形怎样。用复数形式把一般解表为

$$x=Ae^{i\omega t}+Be^{i(\omega+\varepsilon)t}=(A+Be^{i\varepsilon t})e^{i\omega t}. \qquad (22,6)$$

因为量 $A+Be^{i\varepsilon t}$ 在因子 $e^{i\omega t}$ 的周期 $2\pi/\omega$ 时間内改变很小,所以在共振附近的运动可以看作微振动,但振幅要改变[①]。

用 C 表示振幅,我們有

$$C=|A+Be^{i\varepsilon t}|.$$

把 A 和 B 分别表为 $ae^{i\alpha}$ 和 $be^{i\beta}$,我們便得到

$$C^2=a^2+b^2+2ab\cos(\varepsilon t+\beta-\alpha)。 \qquad (22,7)$$

① 振动位相里的"不变"項也要改变。

由此可見，振幅以頻率 ε 周期性地变动于二个界限之間：

$$|a-b|\leqslant c\leqslant a+b_{\circ}$$

这現象名为拍。

在强迫力 $F(t)$ 为任意的情况下，可以在一般形式下积分运动方程(22,2)。这很容易做到，如果預先把它改写为

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}+i\omega x)-i\omega(\dot{x}+i\omega x)=\frac{1}{m}F(t)$$

或

$$\frac{d\xi}{dt}-i\omega\xi=\frac{1}{m}F(t), \tag{22,8}$$

这里引入了复量

$$\xi=\dot{x}+i\omega x_{\circ} \tag{22,9}$$

方程(22,8)已經不是二阶而是一阶的了。如果沒有右边部分的話，它的解則是 $\xi=Ae^{i\omega t}$，其中 A 是常数。根据一般規則，我們寻找形如 $\xi=A(t)e^{i\omega t}$ 的非齐次方程的解，而且对函数 $A(t)$ 我們得到方程

$$\dot{A}(t)=\frac{1}{m}F(t)e^{-i\omega t}_{\circ}$$

积分此方程，我們便得到方程(22,9)的解为

$$\xi=e^{i\omega t}\left\{\int_0^t\frac{1}{m}F(t)e^{-i\omega t}dt+\xi_0\right\}, \tag{22,10}$$

这里积分常数 ξ_0 选擇成 ξ 在时間 $t=0$ 时的值。这就是所要找的一般解，函数 $x(t)$ 由式(22,10)的虛数部分(除以 $i\omega$)給出①。

作强迫振动的体系的能量当然不守恒，体系靠外力源得到能量。假設起始能量等于零，我們来求在力作用的整个时間(从 $-\infty$ 到 $+\infty$)内体系得到的总能量。根据公式(22,10)[积分下限的零代以 $-\infty$，且 $\xi(-\infty)=0$]，当 $t\to\infty$ 时我們得到

① 这时，力 $F(t)$ 当然应該写成实数形式。

$$|\xi(\infty)|^2=\frac{1}{m^2}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)e^{-i\omega t}\,dt\right|^2。$$

另一方面，体系的能量本身由下式給出：

$$E=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\omega^2x^2)=\frac{m}{2}|\xi|^2。\tag{22,11}$$

將 $|\xi(\infty)|^2$ 代入此式，我們便得到所要求的能量迁移为

$$E=\frac{1}{2m}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)e^{-i\omega t}dt\right|^2,\tag{22,12}$$

它由力 $F(t)$ 的其頻率等于体系固有頻率的傅立叶分量的模量的平方所决定。

特别是，如果外力只在很短的时間間隔（和 $1/\omega$ 相較很小）內作用，那末可以讓 $e^{-i\omega t}\cong 1$。这时

$$E=\frac{1}{2m}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)\,dt\right)^2。$$

这結果是早就很清楚的了：它本身表示这样一个事实，即短促时間的力給体系的冲量 $\int F dt$ 来不及在这段时間內引起可覺察的位移。

習　題

1．試对下列各种情况求在力 $F(t)$ 影响下体系的强迫振动，假設在开始时刻 $t=0$，体系靜止在平衡位置上（$x=0$，$\dot{x}=0$）。

（a）$F=$常数$=F_0$。

答：$x=\frac{F_0}{m\omega^2}(1-\cos\omega t)$，恒力的作用使得振动所圍繞的平衡位置移动。

（б）$F=at$。

答：$x=\frac{a}{m\omega^3}(\omega t-\sin\omega t)$。

（в）$F=F_0e^{-\alpha t}$。

答：$x=\frac{F_0}{m(\omega^2+\alpha^2)}\left(e^{-\alpha t}-\cos\omega t+\frac{\alpha}{\omega}\sin\omega t\right)$。

（г）$F=F_0e^{-\alpha t}\cos\beta t$。

答： $$x=\frac{F_0}{m[(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2]}\Big\{-(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)\cos\omega t+$$
$$+\frac{\alpha}{\omega}(\omega^2+\alpha^2+\beta^2)\sin\omega t+e^{-\alpha t}[(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)\cos\beta t-2\alpha\beta\sin\beta t]\Big\}$$

(在求解的过程中把力写成复数形式 $F=F_0e^{(-\alpha+i\beta)t}$ 比較方便)。

2. 有一外力，其变化規律是当 $t<0$ 时 $F=0$，当 $0<t<T$ 时 $F=F_0t/T$，当 $t>T$ 时 $F=F_0$（圖 24），試求經此力作用后体系振动的最后的振幅。在时刻 $t=0$ 以前体系靜止在平衡位置上。

解： 在 $0<t<T$ 的时間間隔內，滿足起始条件的振动有

$$x=\frac{F_0}{mT\omega^3}(\omega t-\sin\omega t)$$

的形式。当 $t>T$ 时，我們来尋求有如下形式的解：

$$x=c_1\cos\omega(t-T)+c_2\sin\omega(t-T)+\frac{F_0}{m\omega^2}.$$

由 x 和 $\dot{x}$ 在 $t=T$ 处連續的条件，我們找到

$$c_1=-\frac{F_0}{mT\omega^3}\sin\omega T,\quad c_2=\frac{F_0}{mT\omega^3}(1-\cos\omega T).$$

同时振动的振幅

$$a=\sqrt{c_1^2+c_2^2}=\frac{2F_0}{mT\omega^3}\sin\frac{\omega T}{2}.$$

我們指出，力 F_0"加入"愈迟（即 T 愈大），則振幅愈小。

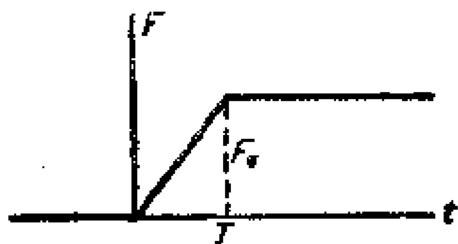


圖 24.

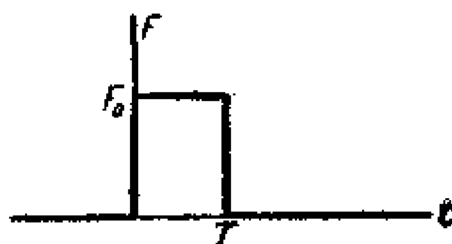


圖 25.

3. 同第二題，但是力 F_0 是恒定的，而且只在有限的一段时間 T 內起作用（圖 25）。

解： 可以像第二題那样求得，但是应用公式 (22,10) 还更簡單些。当 $t>T$ 时我們有圍繞位置 $x=0$ 的自由振动，在这情况下

$$\xi=\frac{F_0}{m}e^{i\omega t}\int_0^T e^{-i\omega t}dt=\frac{F_0}{i\omega m}(1-e^{-i\omega T})e^{i\omega t};$$

按公式 $|\xi|^2=a^2\omega^2$，ξ 的模数的平方给出振幅。因此我們求得

$$a=\frac{2F_0}{m\omega^2}\sin\frac{\omega T}{2}。$$

4. 同第二题，但从零到 T 的一段时間内，作用力的变化规律是 $F=F_0t/T$（圖 26）。

解：用同样的方法可得

$$a=\frac{F_0}{Tm\omega^3}\sqrt{\omega^2T^2-2\omega T\sin\omega T+2(1-\cos\omega T)}。$$

5. 同第二题，但从零到 $T=2\pi/\omega$ 的一段时間内，作用力的变化规律是 $F=F_0\sin\omega t$（圖 27）。

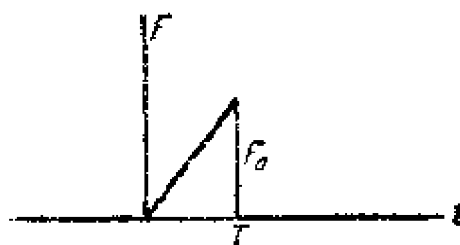


圖　26.

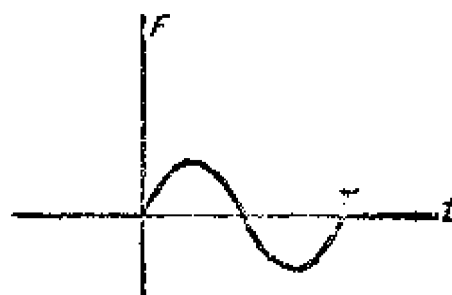


圖　27.

解：把

$$F(t)=F_0\sin\omega t=\frac{F_0}{2i}(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t})$$

代入(22,10)，再从零到 T 积分，我們便得到

$$a=\frac{F_0\pi}{m\omega^2}。$$

§ 23. 多自由度体系的振动

建立具有若干（s）个自由度的体系的自由振动的理論类似于在§21所研究过的一維振动。

假設作为广义坐标 $q_i(i=1, 2, \cdots, s)$ 的函数的体系的位能當 $q_i=q_{i0}$ 时有最小值。引入小的位移

$$x_i=q_i-q_{i0},\tag{23,1}$$

按它来展开 U，准确到二級，我們便得到位能为正定二次齐次式

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i,k}k_{ik}x_ix_k, \tag{23,2}$$

这里我們計算位能仍然从它的極小值开始。既然系数 k_{ik} 和 k_{ki} 在 (23,2) 中是乘以同一量 x_ix_k，所以显然，它們对自己的指数来說，总可以認为是对称的，即

$$k_{ik}=k_{ki}。$$

在一般情况下，动能具有

$$\frac{1}{2}\sum_{i,k}a_{ik}(q)\dot{q}_i\dot{q}_k$$

的形式[見(5,5)]，假設系数里的 $q_i=q_{i0}$，并用 m_{ik} 表示常数 $a_{ik}(q_0)$，則得到动能为正定二次齐次式

$$\frac{1}{2}\sum_{i,k}m_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k。 \tag{23,3}$$

系数 m_{ik} 对指数来說，也总可以認为是对称的，即

$$m_{ik}=m_{ki}。$$

因此，作自由微振动的体系的拉格朗日函数

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i,k}(m_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k-k_{ik}x_ix_k)。 \tag{23,4}$$

現在我們来建立运动方程式。为了确定包含在运动方程式中的微商，我們写出拉格朗日函数的全微分

$$dL=\frac{1}{2}\sum_{i,k}(m_{ik}\dot{x}_id\dot{x}_k+m_{ik}\dot{x}_kd\dot{x}_i-k_{ik}x_idx_k-k_{ik}x_kdx_i)。$$

既然，不言而喻，总和的量不依賴于求和指标的表示法，我們在括号内第一項和第三項中改 i 为 k，而改 k 为 i，再考虑到系数 m_{ik} 和 k_{ik} 的对称性，我們便得到

$$dL=\sum_{i,k}(m_{ik}\dot{x}_kd\dot{x}_i-k_{ik}x_kdx_i)。$$

从这里可以看出，

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i}=\sum_k m_{ik}\dot{x}_k,\quad \frac{\partial L}{\partial x_i}=-\sum_k k_{ik}x_k。$$

因此拉格朗日方程为

$$\sum_k m_{ik}\ddot{x}_k+\sum_k k_{ik}x_k=0。\tag{23,5}$$

它們是 s ($i=1, 2, \cdots, s$) 个常系数的綫性齐次微分方程式的方程組.

按照解这些方程的一般法則,我們来尋求如下形式的 s 个未知函数 $x_k(t)$:

$$x_k=A_ke^{i\omega t},\tag{23,6}$$

其中 A_k 是暫时还未确定的某种常数. 把(23,6)代入方程(23,5),約去 $e^{i\omega t}$ 后我們得到常数 A_k 应該滿足的綫性齐次代数方程組

$$\sum_k(-\omega^2m_{ik}+k_{ik})A_k=0.\tag{23,7}$$

要方程組有不等于零的解,它的行列式应該等于零,即

$$|k_{ik}-\omega^2m_{ik}|=0。\tag{23,8}$$

方程(23,8)即是所謂特征方程,它是 ω^2 的 s 次方程式。在一般情况下,它有 s 个相异的正实根 ω_α^2, $\alpha=1, 2, \cdots, s$ (在个別情况下,它們中間的若干个可以相重). 这样确定的量 ω_α 称为体系的固有頻率。

方程(23,8)的根是实数并且是正的从物理的見解出發早就可以看出了。事实上,如果 ω 包含虛数,那么就意味着在坐标 x_k (以及速度 $\dot{x}_k$)对时間依賴关系 (23,6) 中就有按指数規律減少或按指数規律增加的因子存在。但这种因子的存在在現在这种情况下是不允許的,因为它将引起体系总能量 $E=U+T$ 随时間改变,而这是違反能量守恒定律的。

用純粹数学方法我們同样可以确信这点。对方程(23,7)乘以 A_i^*,再按 i 求合,我們便得到

$$\sum_{i,k}(-\omega^2m_{ik}+k_{ik})A_i^*A_k=0,$$

由此

$$\omega^2=\frac{\sum k_{ik}A_i^*A_k}{\sum m_{ik}A_i^*A_k}。$$

由于系数 k_{ik} 和 m_{ik} 的实数性和对称性，这个表达式的分子和分母中的二次式是实数，事实上，

$$\Big(\sum_{i,k} k_{ik}A_i^*A_k\Big)^* = \sum_{i,k} k_{ik}A_iA_k^* = \sum_{i,k} k_{ki}A_iA_k^* = \sum_{i,k} k_{ik}A_kA_i^*\text{。}$$

本質上它們又都是正值，因此 ω^2 也是正的[①]。

求得頻率 ω_α 后，把它們全部代入方程(23,7)，可以求得相对应的系数 A_k 之值。如果特征方程所有的根都不相同，那么，如所周知，系数 A_k 和行列式(23,8)的子行列式成正比，在其中 ω 被相应的 ω_α 值所代替。我們將用 $\Delta_{k\alpha}$ 来表示这些子行列式，因此，微分方程組(23,5)的特解为

$$x_k = \Delta_{k\alpha}C_\alpha e^{i\omega_\alpha t},$$

式中 C_α 是任意的(复)常数。

所有 s 个特解的和給出一般解。轉到实数部分，把它写为

$$x_k = \mathrm{Re}\Big\{\sum_{\alpha=1}^{s} \Delta_{k\alpha}C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}\Big\} \equiv \sum_\alpha \Delta_{k\alpha}\Theta_\alpha, \tag{23,9}$$

这里我們引入了符号

$$\Theta_\alpha = \mathrm{Re}\{C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}\}\text{。} \tag{23,10}$$

由此可見，体系每个坐标按时間的变化仍是 s 个簡單的周期性振动 $\Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_s$ 的合成，这些振动有任意的振幅和位相，但是有完全确定的頻率。

很自然地会提出疑問，能否把广义坐标选擇得来，使它們中間的每一个坐标只进行簡單的振动呢？一般积分(23,9)的形式本身指出了解决这問題的道路。

---

① 系数 k_{ik} 所构成的二次齐次式的正定性，可从它們的在(23,2)中对变数的实数值的定义中看出。但是把复量 A_k 写成明显的形式 a_k+ib_k，那我們便得到(又是由于 k_{ik} 的对称性)

$$\sum_{i,k} k_{ik}A_i^*A_k = \sum_{i,k} k_{ik}(a_i-ib_i)(a_k+ib_k) = \sum_{i,k} k_{ik}a_ia_k + \sum_{i,k} k_{ik}b_ib_k,$$

即两个正定齐次式之和。

事实上，把(23,9)的 s 个关系式看作 s 个未知量 Θ_α 的方程組，解了这个方程組后，我們可以用坐标 $x_1, x_2, \cdots, x_s$ 来表达量 $\Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_s$。因此这些量 Θ_α 可以看作新的广义坐标。这些坐标称为**簡正坐标**（或主要坐标），而它們所进行的簡單周期性的振动叫做体系的**簡正振动**。

从簡正坐标的定义里可以很明显地看出，簡正坐标满足方程

$$\ddot{\Theta}_\alpha + \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha = 0。 \tag{23,11}$$

这就意味着，在簡正坐标里运动方程被分成为 s 个相互独立的方程。每个簡正坐标的加速度只依賴于这个坐标的值，同时要完全确定它对时間的依賴关系，只需要知道它的初值以及相应于此初值的速度。換句話說，体系的簡正振动完全是独立的。

从上述可見，用簡正坐标所表示的拉格朗日函数化为許多表达式的和，而每一个表达式都对应着频率为某一 ω_α 的一維振动，即有如下形式：

$$L = \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2} (\dot{\Theta}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha^2), \tag{23,12}$$

式中 m_α 是一些正的常数。从数学观点来看这就意味着，变换(23,9)同时把二个二次式[动能(23,3)和位能(23,2)]化成了对角的形式。

一般簡正坐标是这样选择的，就是使得在拉格朗日函数里速度平方的系数等于1。为此，用下列等式决定簡正坐标（现在我們用 Q_α 表示它們）就行了：

$$Q_\alpha = \sqrt{m_\alpha}\, \Theta_\alpha。 \tag{23,13}$$

这时

$$L = \frac{1}{2} \sum_\alpha (\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2)。$$

当特征方程式的根里有重根的时候，所有以上的講述改变很少。运动方程的积分底一般形式(23,9)，(23,10)是一样的（有同样的項数 s），差別仅仅在于相应于重叠頻率的系数 $A_{\alpha\alpha}$ 已經不是

子行列式了，大家知道，这些子行列式在这情况下等于零①。

对应着一个重叠(或称退化)頻率，有多少个不同的簡正坐标，重叠度就是多少。但是这些簡正坐标的选擇不是單值的。既然具有相同 ω_α 的簡正坐标以經同样改变过的 $\sum \dot{Q}_\alpha^2$ 同 $\sum Q_\alpha^2$ 的形式包含在动能和位能中，因此可以对它們进行保持平方和不变的任意綫性变換。

对处于不变外場里一个質点的三維振动来說，很容易求得它的簡正坐标。把笛卡尔坐标系的原点放在位能 $U(x, y, z)$ 最小値的一点上，我們得到 x, y, z 諸变量的二次式形式的位能，而动能

$$T=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$$

(m 是粒子的質量)不依賴于坐标軸方向的选擇。因此只須适当地轉动坐标軸便可把位能化为对角形式。这时

$$L=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-\frac{1}{2}(k_1x^2+k_2y^2+k_3z^2), \quad (23,14)$$

同时沿軸 x, y, z 的振动仍是主要的，并具有頻率

$$\omega_1=\sqrt{\frac{k_1}{m}}, \quad \omega_2=\sqrt{\frac{k_2}{m}}, \quad \omega_3=\sqrt{\frac{k_3}{m}}。$$

在中心对称場的特殊情况下 ($k_1=k_2=k_3=k$, $U=kr^2/2$)，这三个頻率相同(見習題 3)。

应用簡正坐标能使多自由度体系强迫振动的問題化成一維强迫振动的問題。在考虑到作用于体系上的可变外力时，体系的拉格朗日函数有如下形式：

$$L=L_0+\sum_k F_k(t)x_k, \quad (23,15)$$

其中 L_0 是自由振动的拉格朗日函数。引入簡正坐标来代替坐标 x_k，我們便得到

① 从不存在复頻率(否則，将違反能量守恒定律)这同一物理見解出發，显而易見，在一般积分里，除时間的指数函数的因子以外，冪函数因子的出現也是不可能的。

$$L=\frac{1}{2}\sum_{\alpha}(\dot{Q}_{\alpha}^{2}-\omega_{\alpha}^{2}Q_{\alpha}^{2})+\sum_{k}f_{\alpha}(t)Q_{\alpha}, \qquad (23,16)$$

这里采用了符号

$$f_{\alpha}(t)=\sum_{k}F_{k}(t)\sqrt{\frac{\Delta_{k\alpha}}{\sqrt{m_{\alpha}}}}。$$

相应的运动方程式

$$\ddot{Q}_{\alpha}+\omega_{\alpha}^{2}Q_{\alpha}=f_{\alpha}(t) \qquad (23,17)$$

将只含一个未知函数 $Q_{\alpha}(t)$。

習 題

1. 試确定两个自由度体系的振动，設它的拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}^{2}+\dot{y}^{2})-\frac{\omega_{0}^{2}}{2}(x^{2}+y^{2})+\alpha xy$$

(即两个固有频率为 ω_0 的相同的一維体系以相互作用 αxy 联系起来)。

解：运动方程

$$\ddot{x}+\omega_{0}^{2}x=\alpha y, \quad \ddot{y}+\omega_{0}^{2}y=\alpha x。$$

施行代换(23,6)可得

$$A_{x}(\omega_{0}^{2}-\omega^{2})=\alpha A_{y}, \quad A_{y}(\omega_{0}^{2}-\omega^{2})=\alpha A_{x}。 \qquad (1)$$

特征方程是 $(\omega_0^2-\omega^2)^2=\alpha^2$，由此，

$$\omega_{1}^{2}=\omega_{0}^{2}-\alpha, \quad \omega_{2}^{2}=\omega_{0}^{2}+\alpha。$$

方程(1)当 $\omega=\omega_1$ 时給出 $A_x=A_y$，而当 $\omega=\omega_2$ 时給出 $A_x=-A_y$。因此

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(Q_{1}+Q_{2}), \quad y=\frac{1}{\sqrt{2}}(Q_{1}-Q_{2})$$

(系数 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 对应正文中所指出的簡正坐标的規一划因数)。

当 $\alpha\ll\omega_0^2$ (即联系很弱)时我們有

$$\omega_{1}\cong\omega_{0}-\frac{\alpha}{2}, \quad \omega_{2}\cong\omega_{0}+\frac{\alpha}{2}。$$

在这情况下 x 和 y 的变动仍是两个频率相近的振动底合成，即具有拍的性質，并且拍頻为 $\omega_2-\omega_1=\alpha$ (見 § 22)。同时，当坐标 x 的振幅經过最大値的时刻，坐标 y 的振幅經过最小値，反之亦然。

2. 試确定平面双摆的微振动(圖 1)。

解：在 § 5 習題 1 中所求得的微振动 ($\varphi_1\ll1$, $\varphi_2\ll1$) 的拉格朗日函数取

如下形式：

$$L=\frac{m_1+m_2}{2}l_1^2\dot{\varphi}_1^2+\frac{m_2}{2}l_2^2\dot{\varphi}_2^2+m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2-\frac{m_1+m_2}{2}gl_1\varphi_1^2-\frac{m_2}{2}gl_2\varphi_2^2。$$

运动方程式为

$$(m_1+m_2)l_1\ddot{\varphi}_1+m_2l_2\ddot{\varphi}_2+(m_1+m_2)g\varphi_1=0,$$
$$l_1\ddot{\varphi}_1+l_2\ddot{\varphi}_2+g\varphi_2=0。$$

在施行代换(23,6)以后方程变为

$$A_1(m_1+m_2)(g-l_1\omega^2)-A_2\omega^2m_2l_2=0,$$
$$-A_1l_1\omega^2+A_2(g-l_2\omega^2)=0。$$

特征方程式的根为

$$\omega_{1,2}^2=\frac{g}{2m_1l_1l_2}\{(m_1+m_2)(l_1+l_2)\pm$$
$$\pm\sqrt{(m_1+m_2)[(m_1+m_2)(l_1+l_2)^2-4m_1l_1l_2]}\}。$$

当 $m_1\to\infty$ 时频率趋向于极限$\sqrt{g/l_1}$和$\sqrt{g/l_2}$，它們相当于两个摆的独立振动。

3．試求在中心場 $U=\frac{kr^2}{2}$ 內粒子运动(即所謂空間振子)的軌道。

解：正像在所有中心場內一样，运动是在一个平面上进行的，我們选擇这个平面作为 x, y 平面。每个坐标 x, y 的变动是有相同频率 $\omega=\sqrt{k/m}$ 的簡單振动：

$$x=a\cos(\omega t+\alpha),\quad y=b\cos(\omega t+\beta)$$

或者

$$x=a\cos\varphi,\quad y=b\cos(\varphi+\delta)=b\cos\delta\cos\varphi-b\sin\delta\sin\varphi,$$

这里采用了記号 $\varphi=\omega t+\alpha$，$\delta=\beta-\alpha$。由此确定 $\cos\varphi$ 和 $\sin\varphi$，并作成它們的平方和，我們便得到軌道方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\delta=\sin^2\delta。$$

这是中心在坐标原点的橢圓①。当 $\delta=0$ 或者 π 时軌道蜕化为一段直線。

§ 24. 分子振动

如果我們所討論的是有相互作用但不位于外場中的粒子体

① 在位能 $U=kr^2/2$ 的中心場內运动沿閉合曲線进行，这一事实已經在 §14 中提到过了。

系，那么并非它的全部自由度都有振动的特性。分子乃是这种体系的典型例子。除了原子在分子内它們的平衡位置附近振动外，分子整体还可以平动和轉动。

平移对应着三个自由度。在一般情况下，轉动自由度有同样的数目，所以在 n 原子分子底 $3n$ 个自由度中共有 $3n-6$ 个相应于振动的运动。有些分子是例外，在这些分子里所有的原子沿一直綫排列着。既然講圍繞这一直綫轉动沒有意义，那在这种情况下轉动的自由度只有两个，因此振动的自由度有 $3n-5$ 个。

在解关于分子振动的力学問題时，最好一开始就把移动和轉动的自由度置于研究范圍之外。

为了除去移动，就必須認为分子的总冲量等于零。既然这条件意味着分子的慣性中心不动，因此可以把它表为慣性中心三个坐标不变底形式。設 $\boldsymbol{r}_a=\boldsymbol{r}_{a0}+\boldsymbol{u}_a$（其中 $\boldsymbol{r}_{a0}$ 是第 a 个原子的靜止平衡位置底向徑，而 $\boldsymbol{u}_a$ 是对这位置的偏离），則我們可把条件

$$\sum m_a\boldsymbol{r}_a=\text{常矢量}=\sum m_a\boldsymbol{r}_{a0}$$

表为

$$\sum m_a\boldsymbol{u}_a=0\text{。}\tag{24,1}$$

为了要除去分子的轉动，应該使它的总冲量矩等于零。因为矩不是哪一坐标函数对时間的全微商，所以它消失的条件一般来講不可能用哪一个函数等于零的形式来表示。但是弱振动恰好是一个例外。事实上若再次設 $\boldsymbol{r}_a=\boldsymbol{r}_{a0}+\boldsymbol{u}_a$，同时略去不計位移 $\boldsymbol{u}_a$ 的二級小量，則我們可表分子的动量矩为

$$\boldsymbol{M}=\sum m_a[\boldsymbol{r}_a\boldsymbol{v}_a]\cong\sum m_a[\boldsymbol{r}_{a0}\dot{\boldsymbol{u}}_a]=\frac{d}{dt}\sum m_a[\boldsymbol{r}_{a0}\boldsymbol{u}_a]\text{。}$$

因此，在这种近似情况下，它消失的条件可以表为

$$\sum m_a[\boldsymbol{r}_{a0}\boldsymbol{u}_a]=0\tag{24,2}$$

（这时坐标的原点可以任意选擇）。

分子簡正振动可以基于与原子(在平衡位置上)在分子內对称排列相联系的思想，按其中原子运动的特性来分类。为了这个目的，有以群論应用为基础的一般方法，它在这教程的另一卷[①]中講述。这里我們只研究几个簡單的例子。

如果分子中所有 n 个原子位于一平面上，則可以区分原子留在这平面上的簡正振动和使原子越出这平面的簡正振动。很容易确定这两种原子的数目。因为平面运动一共有 $2n$ 个自由度，在这里面有两个平动的和一个轉动的，所以不越出平面的原子底簡正振动的自由度数等于 $2n-3$。其余的 $(3n-6)-(2n-3)=n-3$ 个振动自由度則对应于越出平面的原子底振动。

在綫性分子的情况下，可以区分保持着它的直綫形式底縱振动和原子越出直綫的振动。因为所有按直綫进行的 n 个質点的运动相应于 n 个自由度，在这 n 个自由度当中有一个移动的，所以不使原子越出直綫的振动自由度数等于 $(n-1)$。既然綫性分子振动自由度的总数为 $3n-5$，所以有 $2n-4$ 个是使原子越出直綫振动的。但是这些振动只对应 $n-2$ 个不同的頻率，因为这些振动中的每一个都能够以两种独立的方法即在两个互相垂直的(通过分子軸的)平面上实现，从对称性的考虑出發，显然，每一对这样的簡正振动有相同的頻率。

習　　題[②]

1. 試求綫性三原子对称分子 ABA 振动的頻率(圖 28)。假定分子的位能仅仅依賴于 $A-B$ 和 $B-A$ 的距离及角 ABA。

解：根据(24, 1)原子的縱向位移 x_1, x_2, x_3 由以下关系式相联系：

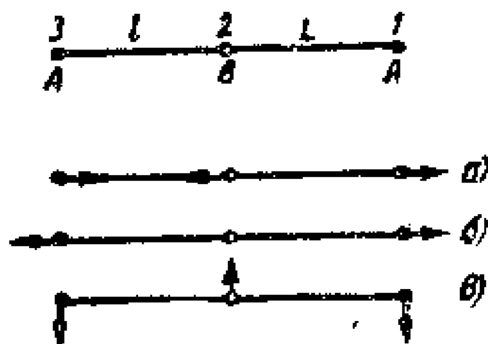
---

① 見第三卷"量子力学"。

② 計算更复杂些的分子底振动，可以在下列書內找到：M. B. 伏尔开斯坦，M. A. 叶立亞塞維奇，Б. И. 斯捷潘諾夫，"分子的振动"，苏联国立技术理論書籍出版社，1949；Г. 赫茨伯尔克，"多原子分子的振动和轉动光譜"，苏联外国書籍出版社，1949。

$$m_A(x_1+x_3)+m_Bx_2=0\text{。}$$

借助于此式，我們从分子縱向运动的拉格朗日函数



$$L=\frac{m_A}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{x}_3^2)+\frac{m_B}{2}\dot{x}_2^2-$$
$$-\frac{k_1}{2}[(x_1-x_2)^2+(x_3-x_2)^2]$$

中除去 x_2，然后引入新的坐标

$$Q_a=x_1+x_3,\quad Q_s=x_1-x_3,$$

結果我們得到

$$L=\frac{m_A\mu}{4m_B}\dot{Q}_a^2+\frac{m_A}{4}\dot{Q}_s^2-\frac{k_1\mu^2}{4m_B^2}Q_a^2-\frac{k_1}{4}Q_s^2$$

圖 28.

($\mu=2m_A+m_B$ 是分子的質量)。从这里可看出，Q_a 和 Q_s(准确到一規一划因数)是簡正坐标。坐标 Q_a 对应于相对分子中心反对称的振动($x_1=x_3$。圖28，a)，且其頻率为

$$\omega_a=\sqrt{\frac{k_1\mu}{m_Am_B}}\text{。}$$

坐标 Q_s 对应于对称($x_1=-x_3$。圖 28，б)振动，且其頻率为

$$\omega_{s1}=\sqrt{\frac{k_1}{m_A}}\text{。}$$

由于 (24, 1) 和 (24, 2)，原子的横向位移 y_1，y_2，y_3 由以下的关系式联系：

$$m_A(y_1+y_3)+m_By_2=0,\ y_1=y_3$$

(对称的弯曲振动。圖 28，в)。我們把分子弯曲位能写为 $k_2l^2\delta^2/2$，其中 δ 是角 ABA 对 π 值的偏差，它由位移按下式来表示：

$$\delta=\frac{1}{l}[(y_1-y_2)+(y_3-y_2)]\text{。}$$

把所有位移 y_1，y_2，y_3，都用 δ 来表示，則得到横振动的拉格朗日函数为

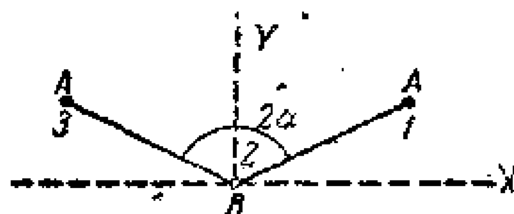
$$L=\frac{m_A}{2}(\dot{y}_1^2+\dot{y}_3^2)+\frac{m_B}{2}\dot{y}_2^2-\frac{k_2l^2}{2}\delta^2=\frac{m_Am_B}{4\mu}l^2\dot{\delta}^2-\frac{k_2l^2}{2}\delta^2,$$

从这里得到頻率

$$\omega_{s2}=\sqrt{\frac{2k_2\mu}{m_Am_B}}\text{。}$$

2．同前題，但这里是三角形的分子 ABA(圖 29)。

解： 由于(24, 1)，(24, 2)，原子位移 u 在 X 和 Y 方向的分量由下列关



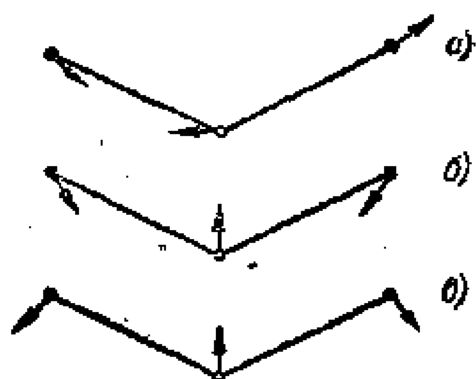


圖 29.

系式联系：

$$m_A(x_1+x_3)+m_Bx_2=0,$$

$$m_A(y_1+y_3)+m_By_2=0,$$

$$\sin\alpha(y_1-y_3)-\cos\alpha(x_1+x_3)=0。$$

距离 $A-B$ 和 $B-A$ 的改变 δl_1 和 δl_2 用向量 u_1-u_2 和 u_3-u_2 在直綫 AB 和 BA 方向上投影的方法来求得：

$$\delta l_1=(x_1-x_2)\sin\alpha+(y_1-y_2)\cos\alpha,$$

$$\delta l_2=-(x_3-x_2)\sin\alpha+(y_3-y_2)\cos\alpha。$$

而角 ABA 的改变用同样的向量在垂直于綫段 AB 和 BA 的方向上投影来求得：

$$\delta=\frac{1}{l}[(x_1-x_2)\cos\alpha-(y_1-y_2)\sin\alpha]+$$

$$+\frac{1}{l}[-(x_3-x_2)\cos\alpha-(y_3-y_2)\sin\alpha]。$$

分子的拉格朗日函数

$$L=\frac{m_A}{2}(\dot{u}_1^2+\dot{u}_3^2)+\frac{m_B}{2}\dot{u}_2^2-\frac{k_1}{2}(\delta l_1^2+\delta l_2^2)-\frac{k_2l^2}{2}\delta^2。$$

引入新的坐标

$$Q_a=x_1+x_3,\quad q_{s1}=x_1-x_3,\quad q_{s2}=y_1+y_3。$$

向量 u 的分量由这些新坐标按下列各式来表示：

$$x_1=\frac{1}{2}(Q_a+q_{s1}),\quad x_3=\frac{1}{2}(Q_a-q_{s1}),\quad x_2=-\frac{m_A}{m_B}Q_a,$$

$$y_1=\frac{1}{2}(q_{s2}+Q_a\operatorname{ctg}\alpha),\quad y_3=\frac{1}{2}(q_{s2}-Q_a\operatorname{ctg}\alpha),\quad y_2=-\frac{m_A}{m_B}q_{s2}。$$

經过計算后，我們便得到拉格朗日函数为

$$L=\frac{m_A}{4}\left(\frac{2m_A}{m_B}+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\dot{Q}_a^2+\frac{m_A}{4}\dot{q}_{s1}^2+\frac{m_A\mu}{4m_B}\dot{q}_{s2}^2-$$

$$-Q_a^2\frac{k_1}{4}\left(\frac{2m_A}{m_B}+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\left(1+\frac{2m_A}{m_B}\sin^2\alpha\right)-$$

$$-\frac{q_{s1}^2}{4}(k_1\sin^2\alpha+2k_2\cos^2\alpha)-q_{s2}^2\frac{\mu^2}{4m_B^2}(k_1\cos^2\alpha+2k_2\sin^2\alpha)+$$

$$+q_{s1}q_{s2}\frac{\mu}{2m_B}(2k_2-k_1)\sin\alpha\cos\alpha。$$

从这里可看出，Q_a 对应着具有下列频率的簡正振动：

$$\omega_a^2=\frac{k_1}{m_A}\left(1+\frac{2m_A}{m_B}\sin^2\alpha\right),$$

并且这振动对于 Y 軸来說是反对称的（$x_1=x_3, y_1=-y_3$。圖 29, a）。

坐标 q_{s1}, q_{s2} 在一起对应着两个振动（对 Y 軸对称：$x_1=-x_3, y_1=y_3$。圖 29, б 和 в），两个振动的频率 ω_{s1}, ω_{s2} 是二次的（按 ω^2）特征方程

$$\omega^4-\omega^2\left[\frac{k_1}{m_A}\left(1+\frac{2m_A}{m_B}\cos^2\alpha\right)+\frac{2k_2}{m_A}\left(1+\frac{2m_A}{m_B}\sin^2\alpha\right)\right]+\frac{2\mu k_1 k_2}{m_B m_A^2}=0$$

的根。

当 $2\alpha=\pi$ 时，所有这些频率和在習題 1 中所得到的相同。

3. 同第一題，但这里是綫性非对称的分子 ABC（圖 30）。

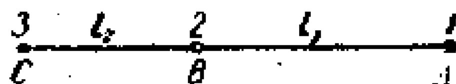


圖　30

解： 原子的縱向（x）位移和横向（y）位移由下面的关系式联系：

$$m_A x_1+m_B x_2+m_C x_3=0,$$

$$m_A y_1+m_B y_2+m_C y_3=0;\quad m_A l_1 y_1=m_C l_2 y_3。$$

把伸長和弯曲位能写成

$$\frac{k_1}{2}(\delta l_1)^2+\frac{k_1'}{2}(\delta l_2)^2+\frac{k_2 l^2}{2}\delta^2$$

（$2l=l_1+l_2$）。类似于習題 1 所进行的計算，对于横向振动的频率导出

$$\omega_t^2=\frac{k_2 l^2}{l_1^2 l_2^2}\left(\frac{l_1^2}{m_C}+\frac{l_2^2}{m_A}+\frac{4l^2}{m_B}\right),$$

同时对于两个縱向振动频率 ω_{l1}, ω_{l2} 导出一个二次（按 ω^2）方程

$$\omega^4-\omega^2\left[k_1\left(\frac{1}{m_A}+\frac{1}{m_B}\right)+k_1'\left(\frac{1}{m_B}+\frac{1}{m_C}\right)\right]+\frac{\mu k_1 k_1'}{m_A m_B m_C}=0。$$

§ 25　阻尼振动

到現在为止，我們一直假定物体的运动是在真空内进行的，或者說介質对运动的影响可以忽略不計。而事实上，物体在介質内运动时，介質要产生力圖使运动减速的阻力。在这种情况下，运动着的物体的能量最后終将轉化为热，或如通常所說，終将耗散。

在这些条件下，运动的过程已經不再是純粹力学的过程了，而对这些运动的研究，就要考虑介質本身的运动，以及介質和物体內部的热状态。特别是，在一般情况下已經不能肯定运动物体底加速度只是該瞬时它的坐标和速度的函数，即在力学中所有在这种意义之下的运动方程是不存在了。这样，物体在介質內运动的問題就已經不是力学的問題了。

但是存在一定类型的情况，在这些情况下，如果在力学的运动方程中引入一些补充項，則可以用来近似地描繪在介質中的运动。頻率較介質中的內耗过程底特征頻率为小的振动即屬此种类型。如果具备这个条件，那末可以認为，在物体上作用着只依賴于(对給定的均匀介質来說)它的速度的"摩擦力"。

如果加之速度又很小，那末可以按速度的方次来展开摩擦力。展开式的零次項等于零，因为在不运动的物体上不作用任何摩擦力，而未消失的第一項和速度成正比。这样，作用在具有广义坐标 x，进行一維微振动的体系上的广义摩擦力就可以写成

$$f_{\text{тр}}=-\alpha\dot{x},$$

式中 α 是正系数，而負号表示力是朝和速度相反的方向作用。把这力添入运动方程式的右边，我們則得[見(21,4)]

$$m\ddot{x}=-kx-\alpha\dot{x}。\tag{25,1}$$

除以 m，并引入記号

$$\frac{k}{m}=\omega_0^2,\quad \frac{\alpha}{m}=2\lambda。\tag{25,2}$$

ω_0 是在沒有摩擦力的情况下体系自由振动的頻率。量 λ 称为阻尼指数(或称阻尼减縮)。

这样一来，我們得到方程

$$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2x=0。\tag{25,3}$$

根据解常系数綫性微分方程的一般法則，我們設 $x=e^{rt}$，从而找到

r 的特征方程

$$r^2+2\lambda r+\omega_0^2=0,$$

由此

$$r_{1,2}=-\lambda\pm\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}。$$

方程(25,3)的普遍解为

$$x=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t}。$$

这里应该区别两种情况。

如果 $\lambda<\omega_0$，那末我們有两个复数共軛的 r 底値。在这种情况下运动方程的一般解可以表示为

$$x=\mathrm{Re}\{A\exp(-\lambda t+i\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\,t)\},$$

式中 A 是任意的复常数。另外也可以写成

$$x=ae^{-\lambda t}\cos(\omega t+\alpha),\quad \omega=\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}, \tag{25,4}$$

式中 a 和 α 是实常数。由这些公式所描繪的运动即是所謂**阻尼振动**。它可以看作为带有指数遞減振幅的諧和振动。振幅遞減的速度由指数 λ 来决定，而振动的"頻率" ω 小于无摩擦的自由振动底頻率，当 $\lambda\ll\omega_0$ 时，ω 和 ω_0 之間的差值是二級小量。存在摩擦时頻率的变小是不出所料的，因为摩擦总是阻碍运动。

如果 $\lambda\ll\omega_0$，那么在一个周期 $2\pi/\omega$ 的时間内，阻尼振动的振幅几乎不改变。在这种情况下，研究坐标和速度平方(在一个周期内)的平均値是有意义的，在平均时，忽略因子 $e^{-\lambda t}$ 的改变。这些平方的平均値显然正比于 $e^{-2\lambda t}$。因此体系能量的平均値按下列規律減少：

$$\overline{E}=E_0e^{-2\lambda t}, \tag{25,5}$$

其中 E_0 是能量的初値。

現在設 $\lambda>\omega_0$。这时 r 的二个値都是实数，而且都是負値。解的普遍形式为

$$x=c_1e^{-(\lambda-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2})t}+c_2e^{-(\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2})t}。 \tag{25,6}$$

我們看到，在这种摩擦力足够大的情况下，运动則成为 x 的單調遞減，即是漸近地(当 $t\to\infty$ 时)趋向平衡位置，而沒有振动。这种运动的类型称为非周期性衰減。

最后，在特殊情况下，当 $\lambda=\omega_0$ 时，特征方程式只有一个根(重根) $r=-\lambda$。大家知道，微分方程的一般解在这情况下为

$$x=(c_1+c_2t)e^{-\lambda t}。 \tag{25,7}$$

这是非周期性衰減的特殊情况。它虽然不一定是單調的运动，但同样沒有振动的性質。

对多自由度的体系来說，对应于坐标 x_i 的广义摩擦力是下列形式的速度的綫性函数：

$$f_{i\,\text{тр}}=-\sum_k\alpha_{ik}\dot{x}_k。 \tag{25,8}$$

从純粹力学的角度来考虑，不能够作出任何关于系数 α_{ik} 对指数 i 和 k 的对称性質的結論。但是用統計物理的方法可以証明[①]，总是

$$\alpha_{ik}=\alpha_{ki}。 \tag{25,9}$$

因此式(25,8)可以写成微商的形式：

$$f_{i\,\text{тр}}=-\frac{\partial F}{\partial\dot{x}_i}, \tag{25,10}$$

其中原函数是二次式

$$F=\frac{1}{2}\sum_{i,k}\alpha_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k, \tag{25,11}$$

它称为耗散函数。

力(25,10)应該添入拉格朗日方程的右端，即

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i}=\frac{\partial L}{\partial x_i}-\frac{\partial F}{\partial\dot{x}_i}。 \tag{25,12}$$

耗散函数本身具有重要的物理意义，在体系中能量耗散的强度即由它来确定。計算出了体系的机械能对时間的微商后就很容

① 見本教程第五卷"統計物理"。

易确信这点了。我們有

$$\frac{dE}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\sum_i \dot{x}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}-L\right)=\sum_i \dot{x}_i\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}-\frac{\partial L}{\partial x_i}\right)=$$

$$=-\sum_i \dot{x}_i\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}。$$

既然 F 是速度的二次函数，那末按照齐次函数的欧勒定理，等式右方的和等于 $2F$。于是，

$$\frac{dE}{dt}=-2F, \qquad (25,13)$$

即体系能量的改变速度由耗散函数的二倍給出。因为耗散过程导致能量的减少，所以永远应該有 $F>0$，即二次式 (25.11) 本質上是正的。

在有摩察力的情况下，微振动的方程是通过添加力 (25,8) 于方程(23,5)的右方得到的，即

$$\sum_k m_{ik}\ddot{x}_k+\sum_k k_{ik}x_k=-\sum_k \alpha_{ik}\dot{x}_k。 \qquad (25,14)$$

設在这些方程里

$$x_k=A_k e^{rt},$$

約去 e^{rt} 我們得到常量 A_k 的綫性代数方程組

$$\sum_k (m_{ik}r^2+\alpha_{ik}r+k_{ik})A_k=0。 \qquad (25,15)$$

使这个方程組的行列式等于零，我們便找到确定 r 底值的特征方程式

$$|m_{ik}r^2+\alpha_{ik}r+k_{ik}|=0。 \qquad (25,16)$$

对 r 来講，这是一个 $2s$ 次方程式。既然它的全部系数是实数，所以它的根或是实数，或是成对的共軛复数。这时实数根一定是負的，而复数根有負的实数部分。不然的話，所有坐标和速度，而和它們在一起的还有体系底能量都將随时間按指数规律增長，可是耗散力的存在应該导致能量的减少。

§ 26. 有摩擦存在的强迫振动

研究有摩擦力存在的强迫振动完全和在 § 22 里所进行的沒有摩擦的振动的研究相似。我們在这里仔細地来討論周期性强迫力的情况，这种情况是值得單独研究的。

在方程(25,1)的右方添入外力 $f\cos\gamma t$，并除以 m 后，我們便得到运动方程

$$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2x=\frac{f}{m}\cos\gamma t。\qquad(26,1)$$

求这方程复数形式的解比較方便，为此我們在右边写 $e^{i\gamma t}$ 来代替 $\cos\gamma t$：

$$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2x=\frac{f}{m}e^{i\gamma t}。$$

我們来寻求形式为 $x=Be^{i\gamma t}$ 的特殊积分，对于 B 我們求得

$$B=\frac{f}{m(\omega_0^2-\gamma^2+2i\lambda\gamma)}。\qquad(26,2)$$

把 B 写为 $be^{i\delta}$ 的形式，对于 b 和 δ 我們有

$$b=\frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2-\gamma^2)^2+4\lambda^2\gamma^2}},\quad \operatorname{tg}\delta=\frac{2\lambda\gamma}{\gamma^2-\omega_0^2}。\qquad(26,3)$$

最后，把表示式 $Be^{i\gamma t}=be^{i(\gamma t+\delta)}$ 中的实数部分分出后，我們便得到方程(26,1)的特殊积分，再給它添上不带右边部分的方程的一般解(为了确定起見，我們写 $\omega_0>\lambda$ 的情况的一般解)，則我們最后得到

$$x=ae^{-\lambda t}\cos(\omega t+\alpha)+b\cos(\gamma t+\delta)。\qquad(26,4)$$

第一項随时間按指数規律下降，所以經过足够長的时間間隔以后留下的只是第二項：

$$x=b\cos(\gamma t+\delta)。\qquad(26,5)$$

当频率 γ 趋近于 ω_0 的时候，强迫振动的振幅 b 的表示式(26,3)虽然也增加，但是不趋向于无穷大，不像沒有摩擦力时在共

振的情况下那样。在力 f 底振幅給定的条件下，当频率 $\gamma=\sqrt{\omega_0^2-2\lambda^2}$ 时振动振幅有最大値；当 $\lambda\ll\omega_0$ 时 γ 的这个数値和 ω_0 間的差别只是二阶小量。

我們来研究一下接近于共振的区域，假設 $\gamma=\omega_0+\varepsilon$，其中 ε 是一小量；同时我們將認为 $\lambda\ll\omega_0$。于是在 (26,2) 中可以近似地进行代换：

$$\gamma^2-\omega_0^2=(\gamma+\omega_0)(\gamma-\omega_0)\approx 2\omega_0\varepsilon,\quad 2i\lambda\gamma\approx 2i\lambda\omega_0,$$

因此

$$B=-\frac{f}{2m(\varepsilon-i\lambda)\omega_0}\tag{26,6}$$

或者

$$b=\frac{f}{2m\omega_0\sqrt{\varepsilon^2+\lambda^2}},\quad \operatorname{tg}\delta=\frac{\lambda}{\varepsilon}。\tag{26,7}$$

我們来指出当强迫力频率改变时，振动和强迫力之間的位相差 δ 变化的特点。位相差总是負的，即振动总是"落后"于外力。离共振很远时，在 $\gamma<\omega_0$ 方面 δ 趋近于零，而在 $\gamma>\omega_0$ 方面 δ 趋近于 $-\pi$。δ 从零到 $-\pi$ 的变化，在 ω_0 附近狭窄(寬度 $\sim\lambda$)的频率区間内进行；当 $\gamma=\omega_0$ 时位相差經过 $-\frac{\pi}{2}$。因此我們指出，在无摩擦力的情况下，当 $\gamma=\omega_0$ 时强迫振动的位相改变一量 π 突变地进行[在(22,4)中的第二項改变符号]，考虑摩擦就"抹平"了这一突变。

在稳定运动情况下，当体系作强迫振动(26,5)时，它的能量保持不变。这时体系不断地(从外力源那里)吸取能量，这些能量由于摩擦的存在而耗散。我們用 $I(\gamma)$ 来表示在單位时間內平均吸收的能量，它是外力频率的函数。按照(25,13)我們有

$$I(\gamma)=2\overline{F},$$

其中 $\overline{F}$ 是耗散函数(按振动的周期)的平均値。对于一維运动

来説，耗散函数的表达式（25,11）化成 $F=\alpha\dot{x}^2/2=\lambda m\dot{x}^2$。代入(26,5)后，我們便得到

$$F=\lambda m b^2\gamma^2\sin^2(\gamma t+\delta)。$$

正弦平方对时間的平均値为 $\frac{1}{2}$，因此

$$I(\gamma)=\lambda m b^2\gamma^2。\tag{26.8}$$

在共振附近，从(26,7)中把振动振幅代入上式則有

$$I(\varepsilon)=\frac{f^2}{4m}\frac{\lambda}{\varepsilon^2+\lambda^2}。\tag{26,9}$$

吸收对頻率的依賴关系的这种形式称为**色散的形式**。如果在某个値 ε 时 $I(\varepsilon)$ 比它在 $\varepsilon=0$ 时的最大值減少一半，則我們称数值 $|\varepsilon|$ 为共振曲綫的半寬度(圖 31)。由公式(26,9)可以看出，在这情况下这寬度和阻尼指数 λ 相等。而最大値的高度

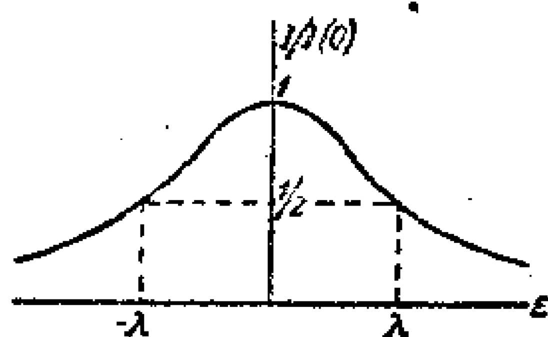


圖 31.

$$I(0)=\frac{f^2}{4m\lambda}$$

和 λ 成反比。由此可見，当阻尼指数变小时，共振曲綫变得更高，即它的最大变得更尖銳。但共振曲綫下的面积在这种情况下仍保持不变。

这个面积由积分

$$\int_0^\infty I(\gamma)d\gamma=\int_{-\omega_0}^\infty I(\varepsilon)d\varepsilon$$

給出，既然 $I(\varepsilon)$ 随 $|\varepsilon|$ 的增加迅速地下降，那么 $|\varepsilon|$ 大的区域无論怎样也不关紧要，因此可以在积分时把 $I(\varepsilon)$ 写成(26,9)的形式，而用 $-\infty$ 来代替下限。这时

$$\int_{-\infty}^\infty I(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{f^2\lambda}{4m}\int_{-\infty}^\infty\frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2+\lambda^2}=\frac{\pi f^2}{4m}。\tag{26,10}$$

習　題

試确定存在摩擦时，在外力 $f=f_0e^{\alpha t}\cos\gamma t$ 作用下的强迫振动。

解：我們先求解复数形式的运动方程式

$$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2x=\frac{f_0}{m}e^{\alpha t+i\gamma t},$$

然后分出解的实数部分。結果我們得到下列形式的强迫振动：

$$x=be^{\alpha t}\cos(\gamma t+\delta),$$

式中
$$b=\frac{f_0}{m\sqrt{(\omega_0^2+\alpha^2-\gamma^2+2\alpha\lambda)^2+4\gamma^2(\alpha+\lambda)^2}},$$

$$\operatorname{tg}\delta=-\frac{2\gamma(\alpha+\lambda)}{\omega_0^2-\gamma^2+\alpha^2+2\alpha\lambda}。$$

§ 27. 参数共振

有这种非封閉系存在，在其中，外界的作用归結为体系参数随时間的改变[1]。

在拉格朗日函数(21,3)里的系数 m 和 k 乃是一維体系的参数，如果它們依賴于时間，那末运动方程是

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x})+kx=0。\tag{27,1}$$

按 $d\tau=dt/m(t)$ 引入新的独立变量 τ 代替 t，此方程則化为

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}+mkx=0。$$

因此，实际上并不对一般性作任何限制，研究下面形式的运动方程式已足够了：

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2(t)x=0,\tag{27,2}$$

在(27,1)中如果 $m=$常数的話，亦可得到此式。

函数 $\omega(t)$ 的形式由問題的条件确定，我們假定，这是頻率为

---

① 这种类型中最簡單的例子是其悬点在竪直方向作給定的周期运动的摆（見習題3）。

γ（因而周期为 $T=2\pi/\gamma$）的周期性函数。这就意味着

$$\omega(t+T)=\omega(t),$$

因此整个方程(27,2)相对于变换 $t\to t+T$ 是不变的，由此得出結論：如果 $x(t)$ 是方程的解，那么，函数 $x(t+T)$ 同样也是解。换句話說，如果 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 是方程(27,2)的两个独立积分，则 $x_1(t+T)$ 和 $x_2(t+T)$ 都可用 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 綫性表示。在这种情况下可以[1]这样来选择 x_1 和 x_2，使得当用 $t+T$ 代 t 时，它們的改变仅仅是乘上一个常数因子，即

$$x_1(t+T)=\mu_1 x_1(t),\quad x_2(t+T)=\mu_2 x_2(t)。$$

具有这种性質的函数的最一般形式是

$$x_1=\mu_1^{t/T}\Pi_1(t),\quad x_2(t)=\mu_2^{t/T}\Pi_2(t) \tag{27,3}$$

其中 $\Pi_1(t)$，$\Pi_2(t)$ 是时間的純周期性函数（周期为 T）。

在这些函数里的常数 μ_1 和 μ_2 应該以一定的关系式相联系。事实上，給方程

$$\ddot{x}_1+\omega^2(t)x_1=0,\quad \ddot{x}_2+\omega^2(t)x_2=0$$

分別乘上 x_2 和 x_1，同时使一个来减另一个，我們便得到

$$\ddot{x}_1x_2-\ddot{x}_2x_1=\frac{d}{dt}(\dot{x}_1x_2-\dot{x}_2x_1)=0$$

或者

$$\dot{x}_1x_2-x_1\dot{x}_2=\text{常数}。\tag{27,4}$$

但是，若 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 是形如(27,3)的任何函数，则当自变量 t 改变 T 时，这等式左端的表达式乘上 $\mu_1\mu_2$。因此很明白，为了要在任何情况下滿足等式(27,4)必須要求

$$\mu_1\mu_2=1。\tag{27,5}$$

从方程式(27,2)系数的实数性这一事实出發，我們可以进一步作关于常量 μ_1，μ_2 的結論。如果 $x(t)$是这个方程式的某个积分，那

① 只要常量 μ_1 和 μ_2 不相重合。

求复数共轭函数 $x^*(t)$ 应該滿足同一个方程式。从这里得出結論：一对常量 μ_1, μ_2 应該和另一对常量 μ_1^*, μ_2^* 相同，也就是說，或者应該有 $\mu_1=\mu_2^*$，或者 μ_1 和 μ_2 都是实数。在第一种情况下，考慮到 (27,5)，我們有 $\mu_1=1/\mu_1^*$，即 $|\mu_1|^2=|\mu_2|^2=1$，常量 μ_1 和 μ_2 的模数都等于 1。

在第二种情况下方程式(27,2)的两个独立积分有如下形式：

$$x_1(t)=\mu^{t/T}\Pi_1(t),\quad x_2(t)=\mu^{-t/T}\Pi_2(t),\qquad(27,6)$$

并且 μ 为不等于 1 的正的或者負的实数。这两个函数中有一个(是第一个或者第二个要看 $|\mu|>1$ 或者 $|\mu|<1$)随时間按指数規律增長。这就是說，体系的靜止狀态(在 $x=0$ 的平衡位置)将是不稳定的：只要对平衡位置有任意小的偏离，就会使出現的位移 x 很快地随时間增長。这个現象称为**参数共振**。

我們应該注意，当 x 与 $\dot{x}$ 的初值严格等于零时，它們在以后也等于零，这和通常共振(§ 22)是不相同的，对通常的共振来說，位移随时間的增長(和 t 成正比)同样發生于初值等于零的情况。

我們要闡明在一个重要情况下，即当函数 $\omega(t)$ 和某个常量相差很少，同时又是簡單的周期性函数

$$\omega^2(t)=\omega_0^2(1+h\cos\gamma t)\qquad(27,7)$$

时引起参数共振的条件，式中常量 $h\ll1$ (我們将認为 h 是正的，这一点总可以用对时間計算起点适当选擇来滿足)。我們在下面将要看到，如果函数 $\omega(t)$ 的頻率接近于頻率 ω_0 的二倍，那么参数共振将發生得最剧烈。因此，我們設

$$\gamma=2\omega_0+\varepsilon,$$

式中 $\varepsilon\ll\omega_0$。

对运动方程[1]

$$\ddot{x}+\omega_0^2[1+h\cos(2\omega_0+\varepsilon)t]x=0,\qquad(27,8)$$

[1] 这种形式(带有常数 γ 和 h)的方程在数学物理中叫馬丟約方程。

我們将寻求下列形式的解:

$$x=a(t)\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+b(t)\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t, \qquad (27,9)$$

其中 $a(t)$ 和 $b(t)$ 是时間的慢变(与 cos 和 sin 相比較)函数。自然,解的这种形式不是很精确的。事实上,函数 $x(t)$ 也包含带这样頻率的项,它与 $(\omega_0+\varepsilon/2)$ 的差是 $(2\omega_0+\varepsilon)$ 的整数倍,不过这些项是 h 的高級无穷小量,而在一級近似中,可以忽略它們(見習題 1)。

把 (27,9) 代入 (27,8) 并且只保留 ε 的一級项进行計算,同时假設,$\dot{a}\sim\varepsilon a$,$\dot{b}\sim\varepsilon b$ (在共振条件下,这假設的正确性由結果来証实)。把三角函数的乘积展开为和,如

$$\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t\cdot\cos(2\omega_0+\varepsilon)t=$$
$$=\frac{1}{2}\cos\left(3\omega_0+\frac{3\varepsilon}{2}\right)t+\frac{1}{2}\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t$$

以及諸如此类,同时和以上所講的相适应,略去带有頻率为 $3\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ 的项,結果我們得到

$$\left(2\dot{a}+b\varepsilon+\frac{h\omega_0}{2}b\right)\omega_0\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+$$
$$+\left(2\dot{b}-a\varepsilon+\frac{h\omega_0}{2}a\right)\omega_0\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t=0。$$

要滿足这一等式,就必須在每个因子 sin 和 cos 前的系数同时等于零。由此我們得到函数 $a(t)$ 和 $b(t)$ 的两个綫性微分方程的方程組。根据一般的法則,我們来寻求正比于 e^{st} 的解。这时,

$$sa+\frac{1}{2}\left(\varepsilon+\frac{h\omega_0}{2}\right)b=0,$$
$$\frac{1}{2}\left(\varepsilon-\frac{h\omega_0}{2}\right)a-sb=0,$$

这两个代数方程协同的条件給出

$$s^2=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2-\varepsilon^2\right]。 \qquad (27,10)$$

發生参数共振的条件是 s 的实数性（即 $s^2>0$）①。由此可見，参数共振發生于頻率 $2\omega_0$② 周圍的区域

$$-\frac{h\omega_0}{2}<\varepsilon<\frac{h\omega_0}{2}。\qquad(27,11)$$

这区域的寬度和 h 成正比，同时振动的增强指数 s 在此区域內底值有同样的数量級。

当体系参数变化的頻率 γ 趋近于 $\frac{2\omega_0}{n}$（式中 n 是任意整数）时，参数共振也会發生。但是随着 n 的增加，共振区域（不稳定性区域）的寬度像 h^n 一样迅速地变小（見習題 2）。在区域內振动的增强指数底值也同样变小。

当体系中有微小的摩擦时，参数共振的現象也存在，但是在这情况下不稳定性区域变窄了一点。我們在 § 25 中已看到，摩擦使得振动的振幅按規律 $e^{-\lambda t}$ 衰減。因此在参数共振情况下，振动的增强像 $e^{(s-\lambda)t}$（s 是正的，它由无摩擦的問題的解所决定）一样地进行，而不稳定性区域的边界由等式 $s-\lambda=0$ 来决定。这样，利用(27,10)中的 s，对于共振区域，我們得到代替(27,11)的不等式

$$-\sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2-4\lambda^2}<\varepsilon<\sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2-4\lambda^2}。\qquad(27,12)$$

我們应該注意，在这种情况下共振不是在振幅 h 任意小的时候都可能發生，而只是从一定的"閾" h_k 开始，在(27,12)的情况下，

$$h_k=\frac{4\lambda}{\omega_0}。$$

能够証明，对于在頻率 $2\omega_0/n$ 附近的共振，閾 h_k 的大小和 $\lambda^{\frac{1}{n}}$

---

① 在(27,6)中的常数 μ 以 $\mu=-e^{\pi s/\omega_0}$ [当用 $t+2\pi/2\omega_0$ 代替 t 时，在(27,9)中的 cos 和 sin 改变符号]和 s 相联系。

② 如果只关心到共振区域的边界（不关心区域內 s 的表达式），則注意到在这些边界上 $s=0$，亦即注意到在(27,9)中系数 a 和 b 是不变的以后可以簡化計算；在这种情况下我們可立刻得到相应于区域(27,11)边界的值 $\varepsilon=\pm h\omega_0/2$。

成正比，即随 n 的增加而增加。

習　題

1. 若在 $\gamma=2\omega_0$ 附近發生共振，試确定不稳定性区域的边界（准确到与 h^2 同級的量）。

解：我們将寻求下面形式的方程式(27, 8)的解：

$$x=a_0\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+b_0\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+$$
$$+a_1\cos 3\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+b_1\sin 3\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t,$$

在这里面，同样考虑到了[和(27,9)相比較] h 的更高級的項。当只注意不稳定性区域的边界时，我們假定所有系数 a_0, b_0, a_1, b_1 为常量（和在 109 頁第二个脚注內所提到的相吻合）。在代入方程(27,8)时，我們把三角函数的乘积展开成和，同时略去带有频率 $5\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)$的項（这些項只是在更高級的近似中才需要），我們便得到

$$\left[-a_0\left(\omega_0\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{4}\right)+\frac{h\omega_0^2}{2}a_0+\frac{h\omega_0^2}{2}a_1\right]\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+$$
$$+\left[-b_0\left(\omega_0\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{4}\right)-\frac{h\omega_0^2}{2}b_0+\frac{h\omega_0^2}{2}b_1\right]\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+$$
$$+\left[\frac{h\omega_0^2}{2}a_0-8\omega_0^2a_1\right]\cos 3\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+$$
$$+\left[\frac{h\omega_0^2}{2}b_0-8\omega_0^2b_1\right]\sin 3\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t=0。$$

在带有频率 $\omega_0+\varepsilon/2$ 的項里保留着一級和二級小量，而在带有频率 $3\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ 的項內保留着一級小量的項。每一个在方括号內的表达式应該分别等于零。从后面两个方括号內的表达式我們找到

$$a_1=\frac{h}{16}a_0,\qquad b_1=\frac{h}{16}b_0。$$

然后从前两个我們便找到

$$\omega_0\varepsilon\pm\frac{h\omega_0^2}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4}-\frac{h^2\omega_0^2}{32}=0。$$

解这个方程准确到与 h^2 同級的項，我們求得 ε 的边界値

$$\varepsilon=\pm\frac{h\omega_0}{4}-\frac{1}{32}h^2\omega_0。$$

2．当共振發生于 $\gamma=\omega_0$ 附近时，試确定不稳定性区域的边界。

解： 命 $\gamma=\omega_0+\varepsilon$，我們得到运动方程

$$\ddot{x}+\omega_0^2[1+h\cos(\omega_0+\varepsilon)t]x=0。$$

注意到所求的边界值 $\varepsilon\sim h^2$，我們来寻找下列形式的解：

$$x=a_0\cos(\omega_0+\varepsilon)t+b_0\sin(\omega_0+\varepsilon)t+$$
$$+a_1\cos 2(\omega_0+\varepsilon)t+b_1\sin 2(\omega_0+\varepsilon)t+c_1,$$

在此式中同时考慮了两个一級項。为了要确定不稳定性的边界，我們再次假定系数是常量，于是得到

$$\left[-2\omega_0\varepsilon a_0+\frac{h\omega_0^2}{2}a_1+h\omega_0^2c_1\right]\cos(\omega_0+\varepsilon)t+$$
$$+\left[-2\omega_0\varepsilon b_0+\frac{h\omega_0^2}{2}b_1\right]\sin(\omega_0+\varepsilon)t+$$
$$+\left[-3\omega_0^2a_1+\frac{h\omega_0^2}{2}a_0\right]\cos 2(\omega_0+\varepsilon)t+$$
$$+\left[-3\omega_0^2b_1+\frac{h\omega_0^2}{2}b_0\right]\sin 2(\omega_0+\varepsilon)t+\left[c_1\omega_0^2+\frac{h\omega_0^2}{2}a_0\right]=0。$$

由此找到

$$a_1=\frac{h}{6}a_0,\quad b_1=\frac{h}{6}b_0,\quad c_1=-\frac{h}{2}a_0,$$

因此不稳定性区域的两个边界是

$$\varepsilon=-\frac{5}{24}h^2\omega_0,\quad \varepsilon=\frac{1}{24}h^2\omega_0。$$

3．試求平面擺微振动的参数共振条件，設擺的悬点在豎直方向振动。

解： 按在 § 5 習題 3，(a) 中所得到的拉格朗日函数，我們求得微振动（$\varphi\ll1$）的运动方程

$$\ddot{\varphi}+\omega_0^2\left(1+4\frac{a}{l}\cos(2\omega_0+\varepsilon)t\right)\varphi=0$$

（式中 $\omega_0^2=g/l$）。由此可見，比率 $4a/l$ 起着正文中所采用的参数 h 的作用。条件(27,11)采取，比方說，下面的形式：

$$|\varepsilon|<\frac{2a\sqrt{g}}{l^{\frac{3}{2}}}。$$

§ 28．非諧和振动

整个以前所講的微振动理論都是建筑在体系的位能和动能按

坐标和速度只保留二級項的展开式之上的，这时运动的方程式是綫性的，正因为如此，在这种近似情况下我們才可以談綫性振动。虽然这种展开在振动振幅很小的条件下完全是合理的，但是对更高一級近似的考虑（所謂振动的非諧和性或者非綫性）就会引导到某些运动的出現，这些运动虽是微弱的，但是在本質上具有新的特点。

我們把拉格朗日函数展开到三級項。这时在位能里將出現坐标 x_i 的三次方項，而在动能里，则添入了含有形如 $\dot{x}_i\dot{x}_k x_l$ 的速度和坐标乘积的項，它与原表达式（23,3）的这个差别是和在函数 $a_{ik}(q)$ 的展开式中保留的相对于 x 的一級項相联系着的。这样，拉格朗日函数有以下形式：

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i,k}(m_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k-k_{ik}x_ix_k)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,k,l}n_{ikl}\dot{x}_i\dot{x}_kx_l-\frac{1}{3}\sum_{i,k,l}l_{ikl}x_ix_kx_l, \qquad (28,1)$$

式中 n_{ikl}，l_{ikl} 是新的常系数。

如果从任意坐标 x_i 过渡到（綫性近似的）簡正坐标 Q_α，那么，由于这个变换是綫性的，在（28,1）中第三与第四个和將轉变为类似的和，只是在其中的坐标 x_i 和速度 $\dot{x}_i$ 將被 Q_α 和 $\dot{Q}_\alpha$ 所代替。把在这些和中的系数表为 $\lambda_{\alpha\beta\gamma}$ 和 $\mu_{\alpha\beta\gamma}$，我們得到拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{2}\sum_{\alpha}(\dot{Q}_\alpha^2-\omega_\alpha^2Q_\alpha^2)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\lambda_{\alpha\beta\gamma}\dot{Q}_\alpha\dot{Q}_\beta Q_\gamma-\frac{1}{3}\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\mu_{\alpha\beta\gamma}Q_\alpha Q_\beta Q_\gamma。 \qquad (28,2)$$

我們不打算把由这个拉格朗日函数导出的运动方程完整地写出来。主要的是它們有下列形式：

$$\ddot{Q}_\alpha+\omega_\alpha^2Q_\alpha=f_\alpha(Q,\dot{Q},\ddot{Q}), \qquad (28,3)$$

其中 f_α 是坐标 Q 和它們对时間的微商的二次齐次函数。

应用逐級近似的方法，我們来尋找下列形式的这些方程的解：

$$Q_\alpha = Q_\alpha^{(1)} + Q_\alpha^{(2)}, \tag{28,4}$$

式中 $Q_\alpha^{(2)} \ll Q_\alpha^{(1)}$，而函数 $Q_\alpha^{(1)}$ 滿足"未受微扰"的方程式

$$\ddot{Q}_\alpha^{(1)} + \omega_\alpha^2 Q_\alpha^{(1)} = 0,$$

卽 $Q_\alpha^{(1)}$ 是普通的諧和振动

$$Q_\alpha^{(1)} = a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \alpha_\alpha)。 \tag{28,5}$$

在高一級的近似里，方程式(28,3)的右边只保留二級小量的項时，我們得到 $Q_\alpha^{(2)}$ 的方程

$$\ddot{Q}_\alpha^{(2)} + \omega_\alpha^2 Q_\alpha^{(2)} = f_\alpha(Q^{(1)}, \dot{Q}^{(1)}, \ddot{Q}^{(1)}), \tag{28,6}$$

表达式(28,5)应該代入此式的右边。結果我們得到非齐次綫性微分方程，并且它們的右边部分可以变換成为簡單周期性函数的和。所以，譬如說，

$$Q_\alpha^{(1)} Q_\beta^{(1)} = a_\alpha a_\beta \cos(\omega_\alpha t + \alpha_\alpha)\cos(\omega_\beta t + \alpha_\beta) =$$

$$= \frac{1}{2} a_\alpha a_\beta \{\cos[(\omega_\alpha + \omega_\beta)t + \alpha_\alpha + \alpha_\beta] +$$

$$+ \cos[(\omega_\alpha - \omega_\beta)t + \alpha_\alpha - \alpha_\beta]\}。$$

由此可見，在方程式(28,6)的右边有与頻率等于体系固有頻率的和与差的振动相对应的項。方程的解应該寻找包含同样周期性因子的形式，于是我們得出結論：在二級近似里，在頻率为 ω_α 的体系的簡正振动上应加上附加振动，其頻率为

$$\omega_\alpha \pm \omega_\beta \tag{28,7}$$

(也包括頻率的二倍卽 $2\omega_\alpha$ 和頻率 0，后者对应着恒定的位移)。这些頻率称为**組合頻率**。組合振动的振幅和对应于簡正振动的乘积 $a_\alpha a_\beta$ (或者平方 a_α^2)成正比。

在高一級的近似里，当拉格朗日函数的展开中考虑到更高阶的項时，則出現組合振动，它們的頻率是具有大量 ω_α 的和与差。但是，除此以外也还發生一个新的現象。

原来是这样，在第三級近似里，在組合頻率中已經出現和原頻

率 ω_α 相合的一些频率($\omega_\alpha+\omega_\beta-\omega_\beta$)。在应用上面所述的方法时，在运动方程的右边将有共振項，这些項使得在解里出現带有随时間而增加的振幅的項。但是，在物理上很显然，在无外界能源的封閉体系中，振动强度不可能自發地增長。

事实上，在更高級的近似里，基本頻率 ω_α 比較出現于二次的位能表达式中之"未受微扰"的值 $\omega_\alpha^{(0)}$，将發生变化。而在解中增長項的出現和下面型式的展开式有联系：

$$\cos(\omega_\alpha^{(0)}+\Delta\omega_\alpha)t\approx\cos\omega_\alpha^{(0)}t-t\Delta\omega_\alpha\sin\omega_\alpha^{(0)}t,$$

当 t 足够大时，这种型式显然是不合理的。

因此当过渡到高一級的近似时，逐級近似的方法其形式应該这样地来改变，使得在解中出現的周期性因子，从一开始就含有确切的，而不是近似的頻率的值。正好是由于共振項不存在，頻率的改变才被方程的解所确定。

把这个方法用在一个自由度的非諧和振动上，把拉格朗日函数写成

$$L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-\frac{m\omega_0^2}{2}x^2-\frac{m\alpha}{3}x^3-\frac{m\beta}{4}x^4。\qquad(28,8)$$

相应的运动方程是

$$\ddot{x}+\omega_0^2x=-\alpha x^2-\beta x^3。\qquad(28,9)$$

我們将寻求逐級近似的級数形式的解

$$x=x^{(1)}+x^{(2)}+x^{(3)},$$

并且

$$x^{(1)}=a\cos\omega t\qquad(28,10)$$

带有精确的 ω 的值，而这个值本身我們将在以后用級数 $\omega=\omega_0+$ $+\omega^{(1)}+\omega^{(2)}+\cdots$ 的形式来寻求(对时間起点作适当选擇，总可以使在 $x^{(1)}$ 中的初相等于零)。但是在这情况下，形式如(28,9)的运动方程式不十分方便，因为在把(28,10)代到它里面后，等式的左方

并不严格等于零。因此我們預先把它改写成等效的形式

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\ddot{x}+\omega_0^2 x=-\alpha x^2-\beta x^3-\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\ddot{x}。 \quad (28,11)$$

假設此处的 $x=x^{(1)}+x^{(2)}$，$\omega=\omega_0+\omega^{(1)}$，同时略去高于二級小量的項，我們便得到 $x^{(2)}$ 的方程式

$$\ddot{x}^{(2)}+\omega_0^2 x^{(2)}=-\alpha a^2\cos^2\omega t+2\omega_0\omega^{(1)}a\cos\omega t=$$

$$=-\frac{\alpha a^2}{2}-\frac{\alpha a^2}{2}\cos 2\omega t+2\omega_0\omega^{(1)}a\cos\omega t。$$

在等式的右方无共振項的条件很容易就給出 $\omega^{(1)}=0$，这和在本节开始时所講到的求二級近似的方法相符合。 然后，用通常的方法解非齐次綫性方程，我們便得到

$$x^{(2)}=-\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2}+\frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2}\cos 2\omega t。 \quad (28,12)$$

其次，在 (28,11) 中假設 $x=x^{(1)}+x^{(2)}+x^{(3)}$，$\omega=\omega_0+\omega^{(2)}$，我們便得到 $x^{(3)}$ 的方程

$$\ddot{x}^{(3)}+\omega_0^2 x^{(3)}=-2\alpha x^{(1)}x^{(2)}-\beta x^{(1)3}+2\omega_0\omega^{(2)}x^{(1)},$$

把表达式 (28,10) 和 (28,12) 代入右方，在經过簡單的变換后可得

$$\ddot{x}^{(3)}+\omega_0^2 x^{(3)}=a^3\left[\frac{\beta}{4}-\frac{\alpha^2}{6\omega_0^2}\right]\cos 3\omega t+$$

$$+a\left[2\omega_0\omega^{(2)}+\frac{5a^2\alpha^2}{6\omega_0^2}-\frac{3}{4}a^2\beta\right]\cos\omega t。$$

使共振因子 $\cos\omega t$ 的系数等于零，我們求得对基本頻率的修正

$$\omega^{(2)}=\left(\frac{3\beta}{8\omega_0}-\frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3}\right)a^2, \quad (28,13)$$

此修正正比于振动振幅底平方。而第三級的組合振动

$$x^{(3)}=\frac{a^3}{16\omega_0^2}\left(\frac{\alpha^2}{3\omega_0^2}-\frac{\beta}{2}\right)\cos 3\omega t。 \quad (28,14)$$

§ 29. 非綫性振动中的共振

如果考慮在体系作强迫振动时非諧和的項，那么在共振現象

中就会發現本質上新的特性。

在方程(28,9)右方加上周期性的(頻率为 γ)外力后可得

$$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2x=\frac{f}{m}\cos\gamma t-\alpha x^2-\beta x^3, \qquad (29,1)$$

在其中我們也写入了阻尼指数为 λ 的摩擦力(以下我們假設 λ 很小)。严格地說,在考慮到自由振动方程式中的非綫性項时,必須同时考慮到强迫力振幅中的高阶項,这些高阶項对应着强迫力对于位移 x 的可能的依賴关系。我們不列入这些項仅仅是为了簡化公式,因为它們不改变現象的本質。

設

$$\gamma=\omega_0+\varepsilon$$

(ε 很小),就是說靠近通常的共振。如果利用下面一些道理,則可以不直接研究方程(29,1)而来探討所發生的运动的性質。

在綫性近似中,在共振附近,强迫振动振幅 b 对外力的振幅 f 和頻率 γ 的依賴关系由公式(26,7)給出,并且这个公式我們把它写成

$$b^2(\varepsilon^2+\lambda^2)=\frac{f^2}{4m^2\omega_0^2}。 \qquad (29,2)$$

振动的非綫性引起其固有頻率对振幅的依賴,我們把固有頻率写成

$$\omega_0+\varkappa b^2, \qquad (29,3)$$

其中常数 $\varkappa$ 以一定的方式通过非諧和系数表示[見(28,13)]。相应地,我們在公式(29,2)中(更确切地說是在微小的差 $\gamma-\omega_0$ 中)把 ω_0 换成 $\omega_0+\varkappa b^2$。

仍采用符号 $\varepsilon=\gamma-\omega_0$,結果我們得到方程

$$b^2[(\varepsilon-\varkappa b^2)^2+\lambda^2]=\frac{f^2}{4m^2\omega_0^2} \qquad (29,4)$$

或者

$$\varepsilon=\varkappa b^2\pm\sqrt{\left(\frac{f}{2m\omega_0 b}\right)^2-\lambda^2}。$$

方程(29,4)是 b^2 的三次方程式，它的实根决定强迫振动的振幅。讓我們来研究一下在外力 f 的振幅为已知时，这个振幅对外力頻率的依賴关系。

当 f 的值足够小时，振幅 b 也小，于是在(29, 4)中可以忽略高于 b 的二次方的項，因而我們又回到了(29,2)的函数关系 $b(\varepsilon)$，这个关系是用在 $\varepsilon=0$ 处为極大值的对称曲綫来表示的(圖 32, a)。随着 f 的增長，曲綫發生形变，最初保持着自己的特点——有一个極大值(圖 32, $б$)，但極大值移到正 ε 一面去了(在 $\varkappa>0$ 时)。这时在方程(29,4)的三个根中只有一个实根。

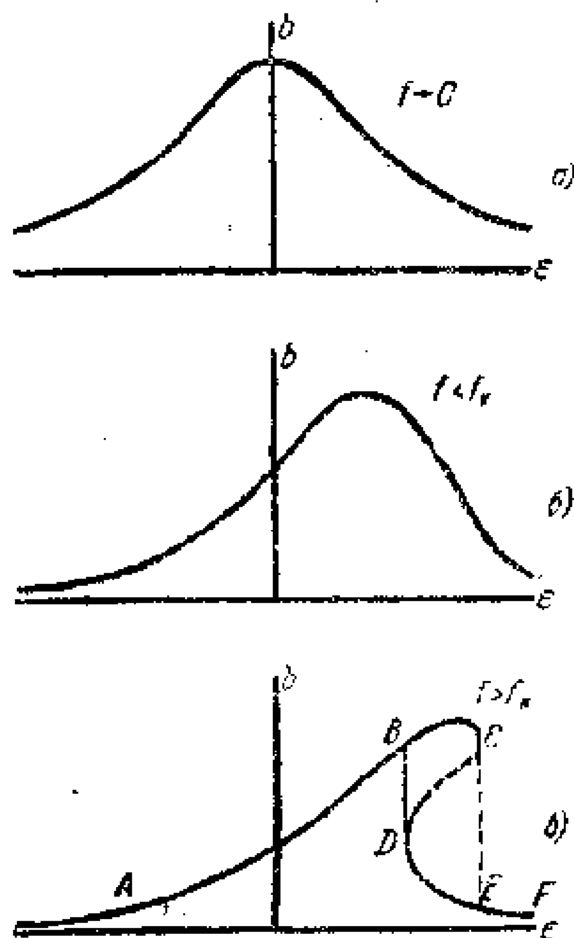


圖 32.

然而，从一定的值 $f=f_k$ (这个値以后我們要确定它)起，曲綫的性質开始改变。在 f 为大于 f_k 的任一个値的情况下，都有一定的頻率区域存在，在这个区域里方程(29,4)有三个实根，在圖 32, $в$ 的曲綫上綫段 $BCDE$ 即相应于这个区域。

在 D 点和 C 点 $\frac{db}{d\varepsilon}=\infty$ 的条件决定这个区域的界限。把方程式(29,4)对 ε 微商后，得到

$$\frac{db}{d\varepsilon}=\frac{-\varepsilon b+\varkappa b^3}{\varepsilon^2+\lambda^2-4\varkappa\varepsilon b^2+3\varkappa^2 b^4}。$$

所以 D 点和 C 点的位置决定于方程

$$\varepsilon^2-4\varkappa b^2\varepsilon+3\varkappa^2 b^4+\lambda^2=0 \tag{29,5}$$

和(29,4)的联合解。联合解的 ε 的两个值都是正的。在 $\frac{db}{d\varepsilon}=0$ 的点上，振幅达到最大值。这时 $\varepsilon=\varkappa b^2$，从(29,4)我們有

$$b_{\max}=\frac{f}{2m\omega_0\lambda},\tag{29,6}$$

这个值和函数关系(29,2)所給的極大值吻合。

可以証明(在这里我們将不研究①)，在方程(29,4)的三个实根中的中間一个根(即在圖32，e 中虛綫所表示的 CD 綫段)相当于体系的不稳定振动：无論多么小的微弱作用加于处在这种状态中的体系上都会使振动变为相应于大一些或小一些的根(即綫段 BC 或 DE)的振动。由此可見，只有 ABC 和 DEF 两个分枝才对应着体系的真实振动。容許两种不同振幅的頻率区的存在是在这种情况下值得注意的特点。所以，在外力的頻率逐漸增加时强迫振动的振幅将沿着曲綫 ABC 增加。在点 C 振幅發生"破裂"，即振幅跃降到相当于 E 点的值，然后(在頻率継續增加时)将沿着曲綫 EF 改变。如果又减少頻率，那么强迫振动的振幅将沿着曲綫 FD 改变，在点 D 振幅跃增到 B，然后将沿着 BA 减少。

为了算出值 f_k，我們应注意，f_k 是当(ε 的)二次方程(29,5)的两根相重时 f 的值，在 $f=f_k$ 时 CD 整段变成一个拐点。使二次方程(29,5)的判別式等于零，我們得到 $\varkappa^2b^4=\lambda^2$，方程式在这种情况下的根是 $\varepsilon=2\varkappa b^2$。把这些 b 和 ε 的值代入(29,4)便找得

$$f_k^2=\frac{8m^2\omega_0^2\lambda^3}{|\varkappa|}。\tag{29,7}$$

当 $\gamma\approx\omega_0$ 时，振动的非綫性除了使共振現象的性質改变以外，还引起新的共振出現，在新共振中，頻率与 ω_0 差別很大的外力激發起頻率与 ω_0 相近的振动。

---

① 証明可以在，譬如說，伯格留博夫和米特罗波利斯基的"非綫性振动理論中的漸近法"(物理数学書籍出版社，1958 年)一書中找到。

設外力的頻率 $\gamma \approx \omega_0/2$，即

$$\gamma = \frac{\omega_0}{2} + \varepsilon。$$

在一級綫形近似中，此外力在体系中激發起頻率相同的振动，其振幅与力的振幅成正比：

$$x^{(1)} = \frac{4f}{3m\omega_0^2} \cos\left(\frac{\omega_0}{2} + \varepsilon\right)t$$

[按照公式(22,4)]。然而在二級近似中考虑到非綫性的項时，这些振动使得在方程式(29,1)右边出現頻率为 $2\gamma \approx \omega_0$ 的項。即是說，把 $x^{(1)}$ 代入方程

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = -\alpha x^{(1)2},$$

引用二倍角的余弦，并在右边仅保留共振項，我們便得到

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} =$$

$$= -\frac{8\alpha f^2}{9m^2\omega_0^4} \cos(\omega_0 + 2\varepsilon)t。 \qquad (29,8)$$

这个方程式和方程式(29,1)的区别仅仅在于其中力 f 的振幅的地方换成了正比于 f^2 的表达式。这就意味着有这种共振产生，它和上面所研究过的在 $\gamma \approx \omega_0$ 处的共振性質相同，但有較小的强度。只要在方程(29,4)中把 f 换成 $-8\alpha f^2/9m\omega_0^4$（并且把 ε 换成 2ε）就可得到函数关系 $b(\varepsilon)$：

$$b^2[(2\varepsilon - \varkappa b^2)^2 + \lambda^2] = \frac{16\alpha^2 f^4}{81m^4\omega_0^{10}}。 \qquad (29,9)$$

現在設外力的頻率

$$\gamma = 2\omega_0 + \varepsilon。$$

在一級近似中我們有

$$x^{(1)} = -\frac{f}{3m\omega_0^2} \cos(2\omega_0 + \varepsilon)t。$$

当在方程式(29,1)中代入 $x = x^{(1)} + x^{(2)}$ 时，与前面情况不同，这里得不到具有共振外力的性質的項。但由于正比于乘积 $x^{(1)}x^{(2)}$ 的三

級項而有参数型共振产生。如果在所有非綫性的項中，只保留这一項的話，那末对 $x^{(2)}$ 我們得到方程

$$\ddot{x}^{(2)}+2\lambda\dot{x}^{(2)}+\omega_0^2x^{(2)}=-2\alpha x^{(1)}x^{(2)}$$

或

$$\ddot{x}^{(2)}+2\lambda\dot{x}^{(2)}+\omega_0^2\left[1-\frac{2\alpha f}{3m\omega_0^4}\cos(2\omega_0+\varepsilon)t\right]x^{(2)}=0, \quad (29,10)$$

即(27,8)类型的(考虑到摩擦的)方程，我們知道，(27.8)就是在一定的頻率間隔中引起振动不稳定性的方程。然而为了确定振动的合成振幅，这个方程是不够的。最終振幅的建立是和非綫性效应有关，为了在方程中估計此效应，应該也保留对 $x^{(2)}$ 是非綫性的項：

$$\ddot{x}^{(2)}+2\lambda\dot{x}^{(2)}+\omega_0^2x^{(2)}+\alpha x^{(2)2}+\beta x^{(2)3}=$$

$$=\frac{2\alpha f}{3m\omega_0^2}\cos(2\omega_0+\varepsilon)t\cdot x^{(2)}。 \quad (29,11)$$

注意到下列情况，对这問題的研究可以大大簡化。如果假定在方程(29,11)的右边

$$x^{(2)}=b\cos\left[\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+\delta\right]$$

(其中 b 是所求的共振振动的振幅，δ 是常相移，它在以后是不重要的)，同时把两个周期性因子的乘积表为两个余弦的和的形式，我們便得到具有通常共振(相对体系的固有頻率 ω_0)性質的項

$$\frac{\alpha fb}{3m\omega_0^2}\cos\left[\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t-\delta\right]。$$

因此，問題又化成了本节初所研究过的关于非綫性体系中通常共振的問題，差别仅仅在于現在是量 $\alpha fb/3\omega_0^2$ 起外力振幅的作用($\varepsilon/2$ 换取了 ε)。在方程式(29,4)中进行这个代换，我們便得到

$$b^2\left[\left(\frac{\varepsilon}{2}-\varkappa b^2\right)^2+\lambda^2\right]=\frac{\alpha^2f^2b^2}{36m^2\omega_0^6}。$$

对于 b 来解这个方程式，我們求得振幅有以下可能的値：

$$b=0, \quad (29,12)$$

$$b^2=\frac{1}{\varkappa}\left[\frac{\varepsilon}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha f}{6m\omega_0^3}\right)^2-\lambda^2}\right],\qquad(29,13)$$

$$b^2=\frac{1}{\varkappa}\left[\frac{\varepsilon}{2}-\sqrt{\left(\frac{\alpha f}{6m\omega_0^3}\right)^2-\lambda^2}\right]。\qquad(29,14)$$

在圖 33 上描繪着从这里所得到 b 对 ε 的依賴关系(这是 $\varkappa>0$ 的情况；在 $\varkappa<0$ 的情况下，曲綫朝向相反的一面)。B 点和 C 点对应于数值

$$\varepsilon=\pm\sqrt{\left(\frac{\alpha f}{3m\omega_0^3}\right)^2-4\lambda^2}。$$

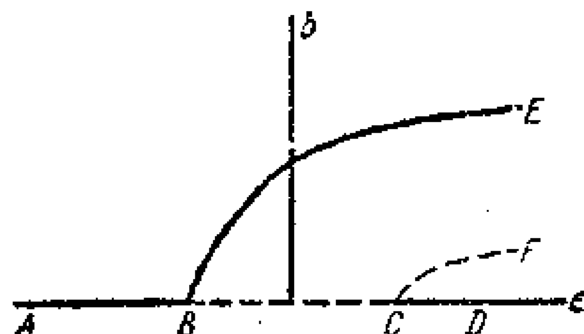


圖 33.

在 B 点的左方只有一个值 $b=0$ 是可能的，卽沒有共振，而且也不能激發起頻率 $\approx\omega_0$ 之振动。在 B 和 C 之間的間隔内，我們有两个根：$b=0$ (圖 33 上的 BC 段) 和表示式 (29,13) (分枝 BE)。最后，在 C 点的右方存在(29,12)—(29,14)的所有三个根，但并不是这些値全都相应于稳定的振动状态。$b=0$ 这个値在 BC 区間上是不稳定的①，并且同样能够証明，相应于(在另外两个根之間的)(29,14)的根的状态永远是不稳定的。在圖 33 上不稳定的 b 値用虛綫表示。

讓我們来考察——比方說——在外力頻率逐漸减小的情况下，最初“靜止”②的体系的行为。在到达 C 点以前一直是 $b=0$，到达以后，这个状态就發生“破裂”而过渡到分枝 EB 上。当 ε 繼

① 这段間隔恰好相应于参数共振的区域(27,12)，并且从(29,10)同(27,8)的比較中，我們有 $|h|=2\alpha f/3m\omega_0^3$。而所研究的現象有可能存在的条件

$$\left|\frac{2\alpha f}{3m\omega_0^3}\right|>4\lambda$$

相应于不等式 $h>h_k$。

② 应当注意，我們这里所研究的只是共振振动。因此，沒有共振并不意味着体系就是靜止的，在体系内将有微弱的，頻率为 γ 的强迫振动。

續減少时，振动的振幅在 B 点減小到零值。在頻率相反地增大时，振动的振幅沿着 BE 曲綫上升[①]。

我們所研究过的共振是产生在非綫性振动体系中的主要情况。在更高級的近似中要出現在其他頻率上的共振。严格地說，在一切滿足 $n\gamma+m\omega_0=\omega_0$ (n, m 是整数) 的頻率 γ 上，也就是說在一切 $\gamma=p\omega_0/q$ (p, q 亦是整数) 上，共振都应發生。然而由于近似程度的提高，共振現象的强度(以及共振現象發生的頻率区域)很快地減小，以致在实际中只能覺察到頻率为 $\gamma\approx p\omega_0/q$，而 p 和 q 值都不大的共振。

習　題

試确定在頻率 $\gamma\approx 3\omega_0$ 上之共振的函数关系 $b(\varepsilon)$。

解：在一級近似中

$$x^{(1)}=-\frac{f}{8m\omega_0^2}\cos(3\omega_0+\varepsilon)t。$$

由(29,1)我們得到二級近似($x^{(2)}$)的方程

$$\ddot{x}^{(2)}+2\lambda\dot{x}^{(2)}+\omega_0^2x^{(2)}+\alpha x^{(2)2}+\beta x^{(2)3}=-3\beta x^{(1)}x^{(2)2},$$

这里，在等式的右边仅仅写出了引起我們所研究的共振的項。假定式中 $x^{(2)}=b\cos\left[\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{3}\right)t+\delta\right]$，并从三个余弦的联乘积中分出共振項，我們便在方程的右端得到表达式

$$\frac{3\beta b^2f}{32m\omega_0^2}\cos\left[\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{3}\right)t-2\delta\right],$$

由此可見，b 对 ε 的依賴关系，可在方程(29,4)中用 $3\beta b^2f/32\omega_0^2$ 代換 f 而用 $\varepsilon/3$ 代換 ε 来求得，亦即根据下面的方程来求得：

$$b^2\left[\left(\frac{\varepsilon}{3}-\varkappa b^2\right)^2+\lambda^2\right]=\frac{9\beta^2f^2}{2^{12}m^2\omega_0^8}b^4\equiv Ab^4。$$

这一方程的根：

---

① 但是应該記住，所有导出的公式只有在振幅 b (以及 ε) 足够小时才是正确的。事实上，曲綫 BE 和 CF 在以后相交于某一点时就完了；当达到这一点时振动状态就被"折断"而 $b=0$。

$$b=0,$$

$$b^2=\frac{\varepsilon}{3\varkappa}+\frac{A}{2\varkappa^2}\pm\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\frac{\varepsilon A}{3\varkappa}+\frac{A^2}{4\varkappa^2}-\lambda^2}。$$

在圖 34 中以圖形表出了 b 对 ε 的依賴关系的特性（$\varepsilon>0$ 时）。仅仅 $b=0$（横軸）及綫段 AB 对应着稳定状态。A 点对应于

$$\varepsilon_k=\frac{3(4\varkappa^2\lambda^2-A^2)}{4\varkappa A} \quad 及 \quad b_k^2=\frac{4\varkappa^2\lambda^2+A^2}{4\varkappa^2 A}$$

两个值。振动状态只在 $\varepsilon>\varepsilon_k$ 时才存在，并且振幅 $b>b_k$。既然 $b=0$ 的状态永远是稳定的，那么为了激發起振动，起始的"推动"就是必需的。

我們所得到的公式仅仅在 ε 很小时才正确。如果这时力的振幅滿足条件 $A\sim\lambda$，则 ε 的微小性由 λ 的微小性来保証。

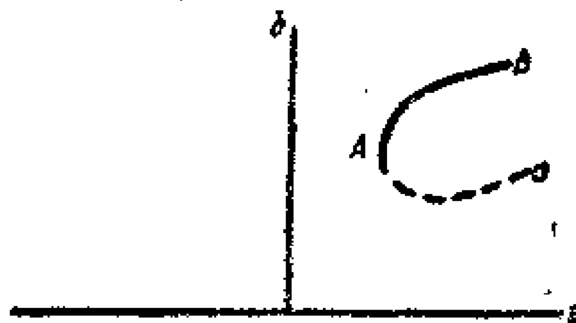


圖 34.

§ 30. 快速交变場中的运动

下面我們将研究同时处于不变場 U 和随时間而改变具有高頻 ω 的力

$$f=f_1\cos\omega t+f_2\sin\omega t \tag{30,1}$$

作用下的粒子的运动（f_1, f_2 是仅仅依賴于坐标的函数）。我們認为满足于条件 $\omega\gg 1/T$ 的頻率是"高頻"，式中 T 与質点只在不变場内运动的周期同数量級。从数量上講力 f 并不比場 U 的作用力弱，但我們假定由这力所引起粒子振动位移很小（以后这位移用 ξ 表示）。

为了簡化运算，我們先研究在仅依賴于一个定向坐标的場内

的一維运动。这时粒子的运动方程式①是

$$m\ddot{x}=-\frac{dU}{dx}+f。\qquad(30,2)$$

从作用于粒子的場的性質就可事先知道，粒子的运动是沿着某一圓滑的軌道移动，同时圍繞着这軌道（以頻率 ω）作微振动。因此我們把函数 $x(t)$ 写成下面和的形式：

$$x(t)=X(t)+\xi(t),\qquad(30,3)$$

其中 $\xi(t)$ 是我們所指的微振动。

函数 $\xi(t)$ 在其周期 $\frac{2\pi}{\omega}$ 时間內的平均值为零，而函数 $X(t)$ 在这段时間內变化很小。若在字母上方加一橫表示这样的平均值，則我們有 $\bar{x}=X(t)$，亦卽函数 $X(t)$ 描述由平均快速振动而得到的粒子的"平穩"运动。我們將推导出决定这一函数的方程②。

將(30,3)代入(30,2)，幷按 ξ 的方次展开，使准确到一級，我們便得到

$$m\ddot{X}+m\ddot{\xi}=-\frac{dU}{dX}-\xi\frac{d^2U}{dX^2}+f(X,t)+\xi\frac{\partial f}{\partial X}。\qquad(30,4)$$

在此方程內，有不同性質的，卽振蕩的及"平穩"的項，很明显，它們应分別在这两个組的每一組中相互約去。对振蕩的項，我們写出

$$m\ddot{\xi}=f(X,t),\qquad(30,5)$$

其他項含有小因子 ξ，因而比我們所写的項小很多（至于微商 $\ddot{\xi}$，由于它和大的数量 ω^2 成正比，因此幷不小）。对含有(30,1)中之函数 f 的方程(30,5)积分（这时量 X 被看作常量），我們得到

$$\xi=-\frac{f}{m\omega^2}。\qquad(30,6)$$

---

① x 不一定是笛卡尔坐标，相应地，乘数 m 不一定是粒子的質量，因而也不一定要像我們在(30,2)中所假定的那样是常数。不过，这样的声明幷不反映在最后的結果上（見后面）。

② 下面所述方法的思想是屬于卡皮察的（1951 年）。

現在，我們来对时間平均（按上面所指的意思）方程 (30,4)。既然一次方的 f 和 ξ 的平均值为零，因此得到只含函数 $X(t)$ 的方程

$$m\ddot{X}=-\frac{dU}{dX}+\overline{\xi\frac{\partial f}{\partial X}}=-\frac{dU}{dX}-\frac{1}{m\omega^2}\overline{f\frac{\partial f}{\partial X}}。$$

最后我們把它改写为

$$m\ddot{X}=-\frac{dU_{\text{эфф}}}{dX},\tag{30,7}$$

其中，"有效位能"由

$$U_{\text{эфф}}=U+\frac{1}{2m\omega^2}\overline{f^2}=U+\frac{1}{4m\omega^2}(f_1^2+f_2^2)\tag{30,8}$$

决定①。将此式同 (30,6) 比較，则很容易看出，增加的（較之場 U 来説）項不是別的，正是振动的平均动能，即

$$U_{\text{эфф}}=U+\frac{m}{2}\overline{\dot{\xi}^2}。\tag{30,9}$$

由此可見，粒子对振动所作的平均运动是这样进行的，就像除了恒定場 U 以外，还有一个附加的恒定場作用着，这附加的恒定場对变場振幅的依賴关系是二次的。

所得的結果可以很容易地推广到任意自由度数的由广义坐标 q_i 所描述的体系上。对于有效位能我們得到[代替(30,8)的]表示式

$$U_{\text{эфф}}=U+\frac{1}{2\omega^2}\sum_{i,k}a_{ik}^{-1}\overline{f_i f_k}=U+\sum_{i,k}\frac{a_{ik}}{2}\overline{\dot{\xi}_i\dot{\xi}_k},\tag{30,10}$$

其中，量 a_{ik}^{-1}（一般說来是坐标的函数）是体系动能的系数 a_{ik} [見(5,5)] 所构成的矩陣之逆矩陣元素。

習 題

1. 試决定摆的稳定平衡位置，假定摆的悬点以高頻率 γ ($\gamma\gg\sqrt{g/l}$) 作

① 在 f 依賴于 x 的情况下，进行一些較長的运算，很易証实公式 (30,7)，(30,8) 也是正确的。

竖直振动。

解：从 §5 的習題 3，(в) 中所得到的拉格朗日函数看出，在这情况下，变力是

$$f=-mla\gamma^2\cos\gamma t\sin\varphi$$

(选角 φ 代替量 x)。因此"有效位能"

$$U_{\text{эфф}}=mgl\left(-\cos\varphi+\frac{a^2\gamma^2}{4gl}\sin^2\varphi\right).$$

稳定平衡位置对应着这函数的最小值。竖直向下的方向 ($\varphi=0$) 永远是稳定的。在满足条件

$$a^2\gamma^2>2gl$$

的情况下，竖直向上的状态 ($\varphi=\pi$) 也是稳定位置。

2. 同前题，但其悬点作水平振动。

解：按 §5 的習題 3，(б) 中所得的拉格朗日函数，我們找到

$$f=mla\gamma^2\cos\gamma t\cos\varphi,$$

于是
$$U_{\text{эфф}}=mgl\left[-\cos\varphi+\frac{a^2\gamma^2}{4gl}\cos^2\varphi\right].$$

如果 $a^2\gamma^2<2gl$，則 $\varphi=0$ 为稳定位置。如果 $a^2\gamma^2>2gl$，則稳定位置对应着

$$\cos\varphi=\frac{2gl}{a^2\gamma^2}.$$

第六章　剛体运动

§31. 角速度

在力学中，剛体可以定义为其間距离保持不变的質点所組成的体系。实际存在在自然界的体系只可能近似地符合这个条件。在一般情况下，大多数固体形状和大小的改变非常小，以至于在把固体当成一个整体来研究其运动規律时，完全可以不去注意这些改变。

为了簡化推导，在以后的講述中，我們将經常把剛体看作是分立的質点集合。这种看法同实际上在力学中常把剛体看成連續体，完全不注意它們内部构造的情况一点也不矛盾。从按質点取和所得出的公式过渡到連續体的公式，只要把粒子的質量换成在体积元 dV 内所包含的質量 ρdV（ρ 是質量密度），然后对物体整个体积积分。

为了描述剛体的运动，引入两个坐标系："静止"坐标系，即惯性坐标系 XYZ，以及固定在剛体上并参与全部运动的运动坐标系 $x_1=x$，$x_2=y$，$x_3=z$。取物体惯性中心为运动坐标系的原点是比較方便的。

剛体相对于静止坐标系的位置完全由运动坐标系的位置来决定。讓向徑 $\boldsymbol{R}$ 表示运动系統原点 O 的位置（圖 35）。而运动系統的坐标軸相对于静止系統的指向由三个独立的角决定，所以同向徑 $\boldsymbol{R}$ 的三个分量一起，我們共有六个坐标。由此可見，任何剛体都是六个自由度的力学体系。

我們来觀察剛体的任意一个无限小的位移。此位移可看作两

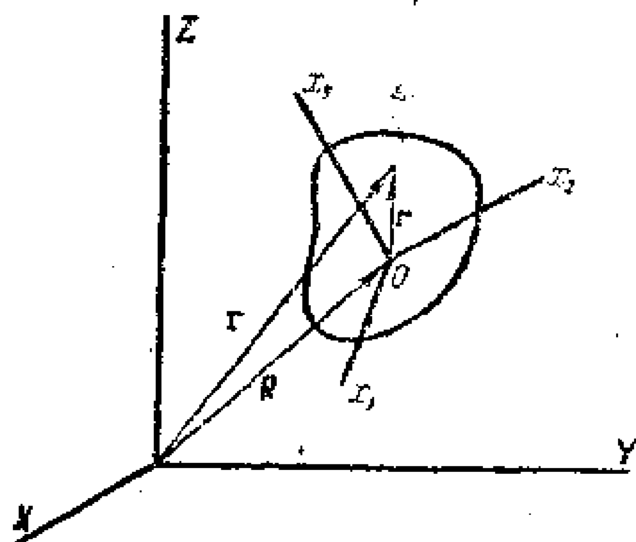


圖 35.

个組成部分的和。其一是物体的无穷小的平移，它使慣性中心从初位置移到終位置，同时运动坐标系軸的指向保持不变。第二部分是繞慣性中心的无穷小的轉动，它使剛体到达最終位置。

剛体的任意一点 P 在运动坐标系統中的向徑用 r 表示，該点在“靜止系統”中的向徑用 $\mathbf{r}$ 来表示。这样，P 点的无限小的位移 $d\mathbf{r}$ 等于同慣性中心一道的位移 $d\boldsymbol{R}$ 加上相对慣性中心轉一无限小角 $d\boldsymbol{\varphi}$ 时的位移 $[d\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{r}]$ [見(9,1)]：

$$d\mathbf{r}=d\boldsymbol{R}+[d\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{r}]。$$

用进行这一位移所需时間 dt 除上面的等式，并引入速度

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\boldsymbol{v},\ \frac{d\boldsymbol{R}}{dt}=\boldsymbol{V},\ \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}=\boldsymbol{\Omega}, \tag{31,1}$$

我們便得到它們之間的关系

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{V}+[\mathbf{r}\boldsymbol{\Omega}]。 \tag{31,2}$$

向量 $\boldsymbol{V}$ 是剛体慣性中心的速度，叫做剛体的平移运动速度。向量 $\boldsymbol{\Omega}$ 叫做剛体轉动的角速度，其方向(和 $d\boldsymbol{\varphi}$ 的方向一样)与轉动軸的方向相同。由此可見，物体任意一点的速度(相对于靜止坐标系)可以用物体的平移速度和轉动角速度来表示。

必須着重指出，在推导公式(31,2)时，坐标原点就是物体的慣性中心这个特殊性質沒有用到。以后当我們計算运动物体的能量时将說明这样选擇坐标原点的优越性。

現在假設固定在剛体上的坐标系統的原点我們不选擇在慣性

中心 O，而在与 O 点相距 $\boldsymbol{a}$ 的某点 O'。这系統原点 O' 的位移速度以 $\boldsymbol{V}'$ 表示，而它的轉动角速度用 $\boldsymbol{\Omega}'$ 表示。

讓我們重新来看刚体的某点 P 并以 $\boldsymbol{r}'$ 表示它相对于原点 O' 的向徑。那么 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{a}$，代入式(31,2)即得

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{V}+[\boldsymbol{\Omega a}]+[\boldsymbol{\Omega r}']。$$

另一方面，按照 $\boldsymbol{V}'$ 和 $\boldsymbol{\Omega}'$ 的定义，应当有 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{V}'+[\boldsymbol{\Omega}'\boldsymbol{r}']$。所以我們得到結論：

$$\boldsymbol{V}'=\boldsymbol{V}+[\boldsymbol{\Omega a}],\quad \boldsymbol{\Omega}'=\boldsymbol{\Omega}。\tag{31,3}$$

其中第二个等式很重要。我們看到，在任一时刻，固定在刚体上的坐标系的轉动角速度完全与坐标系无关。所有这样的坐标系在同一时刻繞着互相平行的軸以絕对值相同的速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 轉动。这种情况使我們有理由称 $\boldsymbol{\Omega}$ 为刚体本身的轉动角速度。而平移的速度絕然不具备这种"絕对"性質。

由(31,3)第一个公式可看出，如对坐标原点 O 作某种选擇后 $\boldsymbol{V}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}$ (在該时刻)相互垂直，則它們(即 $\boldsymbol{V}'$ 和 $\boldsymbol{\Omega}'$)在相对任何其他原点 O' 来确定时也互相垂直。由公式(31,2)看出，这則物体的一切質点的速度 $\boldsymbol{v}$ 都在同一平面——垂直于 $\boldsymbol{\Omega}$ 的平面內。并且，总可能选擇这样的原点 O'①，它的速度 $\boldsymbol{V}'$ 等于零，这样刚体(在該时刻)运动將是圍繞通过 O' 点的軸的純粹轉动。这軸称为物体的瞬时轉軸②。

以后我們將永远假定动坐标系的原点选擇在物体的慣性中心，因此轉动軸也通过这个中心。一般地說，在物体运动时，$\boldsymbol{\Omega}$ 的絕对值以及轉动軸的方向都在变化。

---

① 当然，它可能位于物体体积之外。

② 在 $\boldsymbol{V}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}$ 不互相垂直的一般情况下，可以选擇坐标原点，使 $\boldsymbol{V}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}$ 互相平行，即运动(在該时刻)將为繞某軸的轉动与沿該軸的平移之总合。

§32. 慣量張量

为了計算剛体的动能，我們把剛体看成分立的質点系，因而我們写

$$T=\sum\frac{mv^2}{2},$$

此处是对組成物体的一切質点取和。为了简化公式的书写，这里以及以后我們都将省略去給这些質点編号的指标。

将(31,2)代入此式，我們便得到

$$T=\sum\frac{m}{2}(\boldsymbol{V}+[\boldsymbol{\Omega r}])^2=\sum\frac{m}{2}V^2+\sum m\boldsymbol{V}[\boldsymbol{\Omega r}]+\sum\frac{m}{2}[\boldsymbol{\Omega r}]^2。$$

剛体各点的速度 $\boldsymbol{V}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}$ 都是一样的。所以在第一项中，$\frac{V^2}{2}$ 可搬出求和的記号，而 $\sum m$ 是物質的質量，我們用 μ 表示。对第二項我們可以写

$$\sum m\boldsymbol{V}[\boldsymbol{\Omega r}]=\sum m\boldsymbol{r}[\boldsymbol{V\Omega}]=[\boldsymbol{V\Omega}]\sum m\boldsymbol{r}。$$

由此可見，如果动坐标系的原点照例选在慣性中心，那么这第二項等于零，因为这时 $\sum m\boldsymbol{r}=0$。最后，在第三項中展开向量积的平方，結果便找到

$$T=\frac{\mu V^2}{2}+\frac{1}{2}\sum m\{\Omega^2r^2-(\boldsymbol{\Omega r})^2\}。\qquad(32,1)$$

这样，剛体的动能可以表示为两部分的和。(32,1) 中第一項为平动动能，其形式和全部質量都集中在慣性中心时的形式相同。第二項是以角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 繞通过慣性中心的軸的轉动动能。必須强調指出，之所以我們能把动能分成两部分，完全由于我們将固定在物体上的坐标原点选擇在慣性中心上的緣故。

把轉动动能改写成張量形式，即将动能通过 $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{\Omega}$ 的分量 x_i,

Ω_i 来表示[1]。我們有

$$T_{\text{вр}}=\frac{1}{2}\sum m\{\Omega_i^2x_l^2-\Omega_ix_i\Omega_kx_k\}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum m\{\Omega_i\Omega_k\delta_{ik}x_l^2-\Omega_i\Omega_kx_ix_k\}=$$

$$=\frac{1}{2}\Omega_i\Omega_k\sum m(x_l^2\delta_{ik}-x_ix_k)。$$

这里用了恒等式 $\Omega_i=\delta_{ik}\Omega_k$，其中 δ_{ik} 为單位張量（它的分量在 $i=k$ 时等于1，在 $i\neq k$ 时等于零）。引入張量

$$I_{ik}=\sum m(x_l^2\delta_{ik}-x_ix_k), \tag{32,2}$$

我們便得到剛体动能的最后表达式为

$$T=\frac{\mu V^2}{2}+\frac{1}{2}I_{ik}\Omega_i\Omega_k。 \tag{32,3}$$

从(32,3)中減去位能后可得到剛体的拉格朗日函数

$$L=\frac{\mu V^2}{2}+\frac{1}{2}I_{ik}\Omega_i\Omega_k-U。 \tag{32,4}$$

位能一般説来是决定剛体位置的六个变量的函数。例如，慣性中心的三个坐标 X,Y,Z 和相对于靜止坐标軸确定动坐标軸指向的三个角度。

張量 I_{ik} 称为物体的**轉动慣量張量**，或簡称为**慣量張量**。由定义(32,3)可見，它是对称的，即

$$I_{ik}=I_{ki}。 \tag{32,5}$$

为了清楚起見，把它的各分量明显地列成下表：

$$I_{ik}=\begin{pmatrix}\sum m(y^2+z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz\\ -\sum myx & \sum m(x^2+z^2) & -\sum myz\\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(x^2+y^2)\end{pmatrix}。 \tag{32,6}$$

---

[1] 在本章中用字母 i, k, l 表示可取1，2，3三个值的張量指标。同时各处都应用已知的取和規則，按此規則求和的記号省略了，重复的指标(所謂啞指标)就意味着对1，2，3三个值取和，例如 $A_iB_i=\boldsymbol{AB}$，$A_i^2=A_iA_i=\boldsymbol{A}^2$ 等等。显然啞指标的表示法可以任意改换(只是不要和該式中运用的其他張量指标表示法重合)。

分量 I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} 有时称为相对于对应軸的轉动慣量。

显然,慣量張量可相加,也就是說一个物体的轉动慣量等于它的各部分轉动慣量的和。

若剛体可以看作为連續体,則在定义(32,2)中的和应該用对物体体积的积分来代替,即

$$I_{ik}=\int\rho(x_l^2\delta_{ik}-x_ix_k)dV。\tag{32,7}$$

和所有的二阶对称張量一样,适当地选擇 x_1, x_2, x_3 三条軸的方向,慣量張量可化成对角形式。这些方向称为**慣量主軸**,而相应的張量分量的值称为**主轉动慣量**,并用 I_1, I_2, I_3 表示。当三条軸 x_1, x_2, x_3 这样选擇时,轉动动能的表达式特别簡單:

$$T_{\text{вр}}=\frac{1}{2}(I_1\Omega_1^2+I_2\Omega_2^2+I_3\Omega_3^2)。\tag{32,8}$$

应該說明,主轉动慣量中的任一个都不能大于其余二个的和。譬如說,

$$I_1+I_2=\sum m(x_1^2+x_2^2+2x_3^2)\geqslant\sum m(x_1^2+x_2^2)=I_3。\tag{32,9}$$

三个主轉动慣量互不相等的物体叫做**不对称陀螺**。

如果两个主轉动慣量相等,$I_1=I_2\neq I_3$,則剛体叫做**对称陀螺**。在这种情况下,在平面 x_1x_2 内主軸方向的选擇是任意的。

如果所有三个主轉动慣量都相等,則物体叫做**球形陀螺**。在这种情况下,三个慣量主軸都可以任意选擇:可取任意三个相互垂直的軸作慣量主軸。

如果剛体具有某种对称性,則慣量主軸的寻找就要容易得多。显然,慣性中心的位置和慣量主軸的方向应該具备同样的对称性。

譬如說,如果物体具有对称平面,那么慣性中心应在这平面内。两个慣量主軸也在这平面内,而第三个則垂直于此平面。这种情形最明显的例子是分布在一个平面内的質点体系。在这种情况下三个主轉动慣量之間存在着簡單的关系。如果选取体系的平

面作为平面 x_1x_2，那么，由于对所有的質点 $x_3=0$，我們有

$$I_1=\sum mx_2^2,\quad I_2=\sum mx_1^2,\quad I_3=\sum m(x_1^2+x_2^2),$$

因此

$$I_3=I_1+I_2。\tag{32,10}$$

如果物体具有某級的对称軸，則慣性中心在这軸上。慣性主軸中之一和它重合，而另外两个垂直于它。这时若軸对称級数大于二，則物体为对称陀螺。事实上，每一个（垂直于对称軸的）主軸可以旋轉一个不等于 180° 的角，卽这些軸的选擇不是單値的，而这只有在对称陀螺的情况下才可能。

沿着直綫分布的粒子体系是一特殊情况。若选取这条直綫作軸 x_3，那么对所有的質点 $x_1=x_2=0$，所以两个主轉动慣量相等，而第三个等于零，卽

$$I_1=I_2=\sum mx_3^2,\ I_3=0。\tag{32,11}$$

这样的体系叫做轉子。轉子和任意物体的一般情况不同的特殊性質在于它只有相应于繞軸 x_1 和 x_2 轉动的两个（而不是三个）轉动自由度。說直綫繞自身轉动显然是沒有意义的。

最后，再作一点关于計算慣量張量的說明。尽管我們是相对以慣量中心为原点的坐标系統来定义这个張量[基本公式(32,3)只有在这种定义下才有效]，但为了計算它，有时預先計算相对于另一原点 O' 所确定的类似張量

$$I'_{ik}=\sum m(x_l'^2\delta_{ik}-x_i'x_k')$$

可能还更方便些，如果距离 OO' 由向量 $\boldsymbol{a}$ 决定，則 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{a}$，$x_i=x_i'+a_i$；再考虑到 $\sum m\boldsymbol{r}=0$（按照点 O 的定义），我們便找到

$$I'_{ik}=I_{ik}+\mu(a^2\delta_{ik}-a_ia_k)。\tag{32,12}$$

按此公式，如果已知 I'_{ik}，要求的張量 I_{ik} 就很容易計算了。

習　題

1. 把分子看作相互間距离不变的粒子体系，試决定以下几种情况中分子的主轉动慣量：

(a)由分布在一直綫上的原子組成的分子。

答：

$$I_1=I_2=\frac{1}{\mu}\sum_{a\neq b} m_a m_b l_{ab}^2,\quad I_3=0,$$

其中 m_a 是原子質量，l_{ab} 是原子 a 和 b 之間的距离，求和是对分子中所有的原子对进行(在和中，每一对 a, b 之值只出現一次)。

对二原子分子，这和縮減为一項，我們得到早就可以看出的結果——两个原子的折合質量乘它們之間距离的平方，即

$$I_1=I_2=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}l^2.$$

(б)形状为等腰三角形的三原子分子(圖 36)。

答： 慣性中心在三角形的高上，与底相距 $X_2=m_2h/\mu$。轉动慣量为

$$I_1=\frac{2m_1m_2}{\mu}h^2,\quad I_2=\frac{m_1}{2}a^2,\quad I_3=I_1+I_2.$$

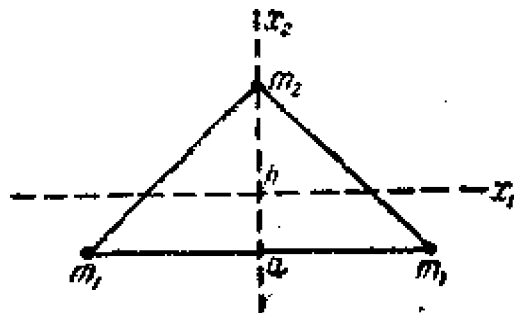


圖 36.

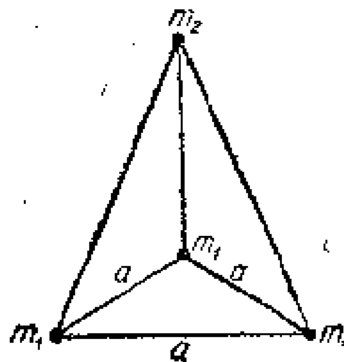


圖 37.

(в)四原子的分子，原子位于正三棱錐的各頂点(圖 37)。

答： 慣性中心位于三棱錐的高上，与底相距 $X_3=m_2h/\mu$。轉动慣量为

$$I_1=I_2=\frac{3m_1m_2}{\mu}h^2+\frac{m_1a^2}{2},\quad I_3=m_1a^2.$$

当 $m_1=m_2$ 时，$h=a\sqrt{\frac{2}{3}}$，我們得到一个四面体分子，其轉动慣量为

$$I_1=I_2=I_3=m_1a^2.$$

2. 試决定連續均匀体的主轉动慣量。

(a) 長为 l 的細棒。

答：　$I_1=I_2=\frac{1}{12}\mu l^2$，$I_3=0$（棒的粗細忽略不計）。

(б) 半徑为 R 的球。

答：
$$I_1=I_2=I_3=\frac{2}{5}\mu R^2$$
(計算可得 $I_1+I_2+I_3=2\rho\int r^2dV$)。

(в) 半徑为 R 高为 h 的圓柱。

答：
$$I_1=I_2=\frac{\mu}{4}\left(R^2+\frac{h^2}{3}\right),\quad I_3=\frac{\mu}{2}R^2$$
(x_3 是圓柱的軸)。

(г) 边为 a, b, c 的長方体。

答：
$$I_1=\frac{\mu}{12}(b^2+c^2),\ I_2=\frac{\mu}{12}(c^2+a^2),\ I_3=\frac{\mu}{12}(a^2+b^2)$$
(三条軸 x_1, x_2, x_3 平行于三个边 a, b, c)。

(д) 以 h 为高 R 为底半徑的圓錐体。

解：首先求相对于以錐頂为原点的軸(圖38)的張量 I'_{ik}。运算在柱坐标中很容易进行，并給出
$$I'_1=I'_2=\frac{3}{5}\mu\left(\frac{R^2}{4}+h^2\right),\quad I'_3=\frac{3}{10}\mu R^2。$$
簡單的运算指出，重心位于錐体的軸上，与頂点相距 $a=3h/4$。根据公式(32,12)最后得到
$$I_1=I_2=I'_1-\mu a^2=\frac{3}{20}\mu\left(R^2+\frac{h^2}{4}\right),$$
$$I_3=I'_3=\frac{3}{10}\mu R^2。$$

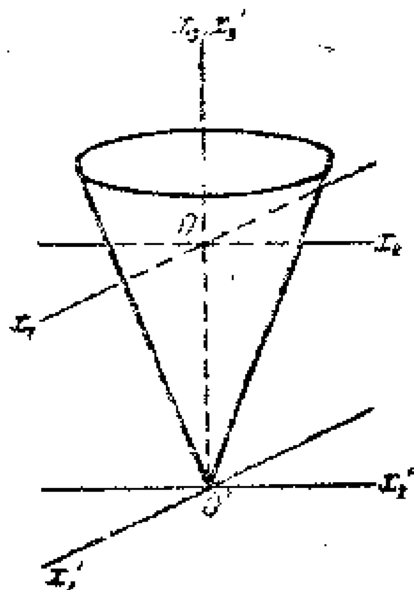


圖 38.

(e) 主軸为 a, b, c 的三軸橢球。

解：慣性中心同橢球中心重合，慣量主軸同橢球的軸重合。坐标变换 $x=a\xi$, $y=b\eta$, $z=c\zeta$，能变橢球表面的方程式
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$
为單位球表面方程式
$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1,$$

我們用这个变换可将对橢球的体积积分化为对球的体积积分。

于是，我們得到相对 x 軸的轉动慣量

$$I_1=\rho\iiint(y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\rho abc\iiint(b^2\eta^2+c^2\zeta^2)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta=abc\,\frac{1}{2}I'(b^2+c^2),$$

其中 I' 是單位球的轉动慣量。考虑到橢球体积等于 $4\pi abc/3$，最后便得到轉动慣量

$$I_1=\frac{\mu}{5}(b^2+c^2),\quad I_2=\frac{\mu}{5}(a^2+c^2),\quad I_3=\frac{\mu}{5}(a^2+b^2)。$$

3．試确定作微振动的物理摆（在重力場中靜止水平軸附近摆动的固体）的頻率。

解： 設 l 是从慣性中心到轉动軸的距离，而 α,β,γ 为慣量主軸和轉动軸之間的夹角。从慣性中心作一垂直綫到轉軸上，把这条綫与竪直方向所成的角 φ 当作坐标变量。慣性中心的速度是 $V=l\dot\varphi$，而角速度在慣量主軸上的投影为 $\dot\varphi\cos\alpha$, $\dot\varphi\cos\beta$, $\dot\varphi\cos\gamma$。当認为角 φ 很小时，位能可以写成

$$U=\mu gl(1-\cos\varphi)\approx\frac{1}{2}\mu gl\varphi^2。$$

所以拉格朗日函数

$$L=\frac{\mu l^2}{2}\dot\varphi^2+\frac{1}{2}(I_1\cos^2\alpha+I_2\cos^2\beta+I_3\cos^2\gamma)\dot\varphi^2-\frac{\mu gl}{2}\varphi^2。$$

由此对于振动頻率我們有

$$\omega^2=\frac{\mu gl}{\mu l^2+I_1\cos^2\alpha+I_2\cos^2\beta+I_3\cos^2\gamma}。$$

4．求圖 39 所表示的体系的动能，OA 同 AB 是均匀的長为 l 的細杆，相接在 A 点并可以活动。杆 OA（在圖面上）繞 O 点轉动，而杆 AB 的 B 端沿 Ox 軸滑动。

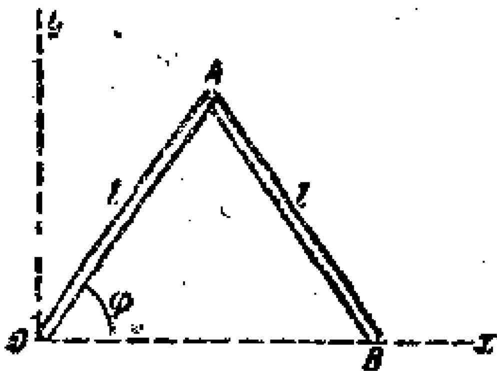


圖 39.

解： 杆 OA 的慣性中心（位于它的中点）的速度是 $l\dot\varphi/2$，其中 φ 是角 AOB。所以杆 OA 的动能

$$T_1=\frac{\mu l^2}{8}\dot\varphi^2+\frac{I}{2}\dot\varphi^2$$

（μ 是一根杆的質量）。

杆 AB 的慣性中心的笛卡尔坐标：$X=\frac{3l}{2}\cos\varphi$，$Y=\frac{l}{2}\sin\varphi$。因为此杆的轉动角速度也等于 $\dot\varphi$，所以它的动能

$$T_2=\frac{\mu}{2}(\dot X^2+\dot Y^2)+\frac{I}{2}\dot\varphi^2=\frac{\mu l^2}{8}(1+8\sin^2\varphi)\dot\varphi^2+\frac{I\dot\varphi^2}{2}。$$

体系的总动能

$$T=\frac{\mu l^2}{3}(1+3\sin^2\varphi)\dot\varphi^2$$

$\left(\text{根据習題 2, (a) 代入 } I=\frac{\mu l^2}{12}\right)$。

5．試求沿平面滚动之圓柱（半徑为 R）的动能。圓柱質量按体积的分布使慣量主軸之一平行于圓柱的軸，并与軸相距 a，相对这个主軸的轉动慣量为 I。

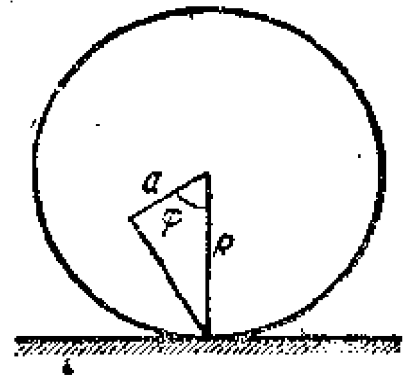


圖 40.

解： 从圓柱的重心到圓柱軸作一垂綫，令垂綫与竪直綫之間的角为 φ（圖 40）。圓柱的运动在每一个时刻都可以看成是繞瞬时軸的純粹轉动，瞬时軸与圓柱同靜止平面的接触綫是重合的，这个轉动的角速度是 $\dot\varphi$（繞一切平行軸的轉动角速度相等）。慣性中心与瞬时軸相距 $\sqrt{a^2+R^2-2aR\cos\varphi}$，所以它的速度是 $V=\dot\varphi\sqrt{a^2+R^2-2aR\cos\varphi}$。总动能

$$T=\frac{\mu}{2}(a^2+R^2-2aR\cos\varphi)\dot\varphi^2+\frac{I}{2}\dot\varphi^2。$$

6．試求沿着圓筒（半徑为 R）内表面滚动的均勻圓柱（半徑为 a）的动能（圖 41）。

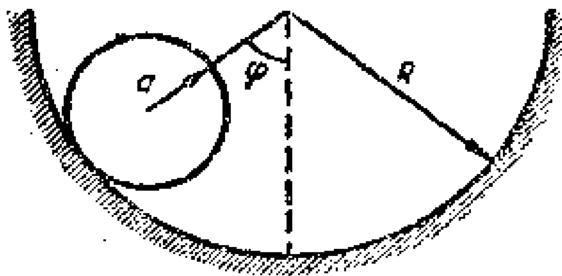


圖 41.

解： 設 φ 为两圓柱联心綫和竪直綫間的夾角。滚动圓柱的慣性中心在軸上，其速度是 $V=\dot\varphi(R-a)$。現在来計算它繞瞬时軸的純轉动的角速度，瞬时軸与两圓柱的接触綫是重合的。这角速度等于

$$\Omega=\frac{V}{a}=\dot\varphi\frac{R-a}{a}。$$

如果 I_3 是相对于圓柱軸的轉动慣量，那么

$$T=\frac{\mu}{2}(R-a)^2\dot\varphi^2+\frac{I_3}{2}\frac{(R-a)^2}{a^2}\dot\varphi^2=\frac{3}{4}\mu(R-a)^2\dot\varphi^2$$

[I_3 取自第2題，(в)]。

7. 試求在平面上滾动的均勻圓錐体的动能。

解：以 θ 表示圓錐体与平面接触綫同这一平面的某一不变方向之間的夾角(圖42)。慣性中心在圓錐軸上，其速度为 $V = a\cos\alpha\cdot\dot{\theta}$，其中 2α 是圓錐

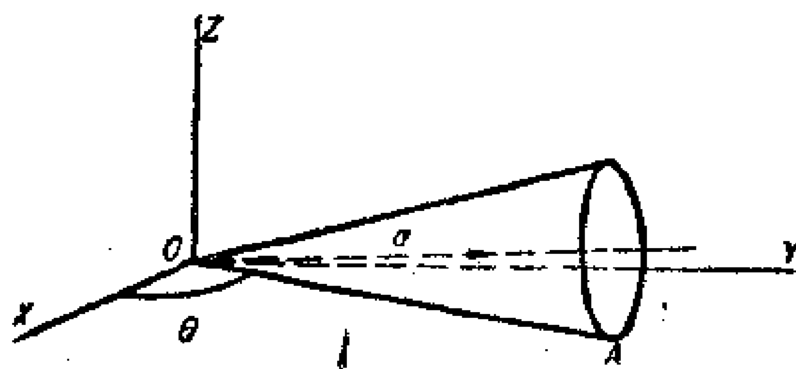


圖 42.

頂点的張角，而 a 是慣性中心到頂点的距离。我們來計算繞瞬时軸 OA 的純轉动的角速度：

$$\Omega = \frac{V}{a\sin\alpha} = \dot{\theta}\operatorname{ctg}\alpha。$$

慣量主軸之一(x_3 軸)与圓錐軸相重合，另一个(x_2 軸)垂直于圓錐軸及綫 OA。这样，向量 $\boldsymbol{\Omega}$ (平行于 OA) 在慣量主軸上的投影是 $\Omega\sin\alpha$, 0, $\Omega\cos\alpha$。結果找到所要求的动能

$$T = \frac{\mu a^2}{2}\cos^2\alpha\cdot\dot{\theta}^2 + \frac{I_1}{2}\cos^2\alpha\cdot\dot{\theta}^2 + \frac{I_3}{2}\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha}\dot{\theta}^2 = \frac{3\mu h^2}{40}\dot{\theta}^2(1+5\cos^2\alpha)$$

[h 是圓錐之高，I_1, I_3, a 取自題2，(а)]。

8. 求均勻圓錐的动能，它的底沿平面滾动，而頂点与平面的距离始終等于底的半徑(因而圓錐的軸平行于平面)。

解：設角 θ 为平面上給定的方向同圓錐軸在平面上的投影之間的夾角(圖43)。这样，慣性中心的速度 $V = a\dot{\theta}$ (符号同題7)。

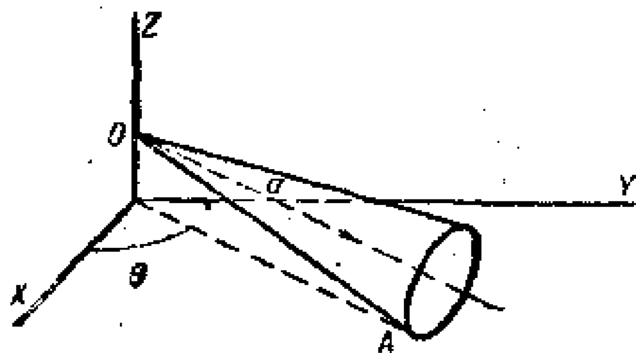


圖 43.

瞬时軸是引向圓錐与平面的切点的圓錐母綫 OA。慣性中心与此軸相距 $a\sin\alpha$，所以

$$\Omega=\frac{V}{a\sin\alpha}=\frac{\dot\theta}{\sin\alpha}。$$

向量 Ω 在慣量主軸上的投影(选擇軸 x_2 垂直于綫 OA 及圓錐軸): $\Omega\sin\alpha=\dot\theta$, 0, $\Omega\cos\alpha=\dot\theta\operatorname{ctg}\alpha$。所以,动能

$$T=\frac{\mu a^2}{2}\dot\theta^2+\frac{I_1}{2}\dot\theta^2+\frac{I_3}{2}\dot\theta^2\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{3\mu h^2}{40}\dot\theta^2\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}+5\right)。$$

9. 均匀的三軸橢球繞自己的一个軸(AB, 圖 44)旋轉,并且这个軸本身又繞与它垂直并通过橢球中心的 CD 方向轉动。試求橢球的动能。

解: 以 θ 表繞軸 CD 的轉角,而 φ 为繞軸 AB 的轉角(CD 与垂直于 AB 的慣量軸 x_1 之間的夹角)。这样,Ω 在慣量軸上的投影为

$$\dot\theta\cos\varphi,\ \dot\theta\sin\varphi,\ \dot\varphi$$

(軸 x_3 与 AB 重合)。既然与橢球中心相合的慣性中心不动,所以动能

$$T=\frac{1}{2}(I_1\cos^2\varphi+I_2\sin^2\varphi)\dot\theta^2+\frac{1}{2}I_3\dot\varphi^2。$$

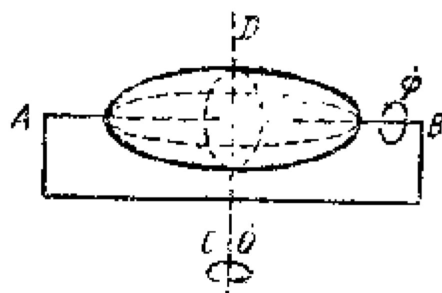


圖 44.

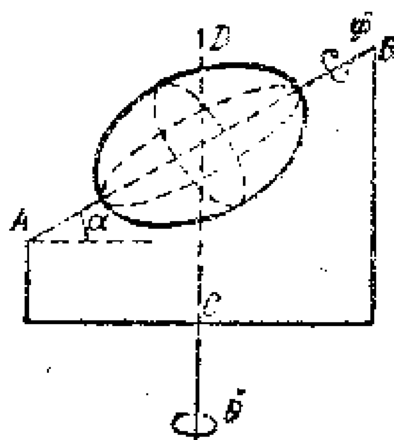


圖 45.

10. 同前題,假定軸 AB 是傾斜的,而橢球相对于这个軸是对称的(圖 45)。

解: Ω 在 AB 軸及在其他两条与 AB 垂直的慣量主軸(它們可以任意选擇)上的投影为

$$\dot\theta\cos\alpha\cos\varphi,\ \dot\theta\cos\alpha\sin\varphi,\ \dot\varphi+\dot\theta\sin\alpha。$$

动能

$$T=\frac{I_1}{2}\cos^2\alpha\cdot\dot\theta^2+\frac{I_3}{2}(\dot\varphi+\dot\theta\sin\alpha)^2。$$

§ 33. 剛体的冲量矩

我們知道,一个体系的冲量矩的大小与决定冲量矩所相对的

点的选择有关。在刚体力学中，最合理的是把这一点选在运动坐标系的原点，即物体的惯性中心。以后我們用 $\boldsymbol{M}$ 表示这样决定的冲量矩。

按照公式(9, 6)，当把坐标原点选在物体的惯性中心时，它的矩 $\boldsymbol{M}$ 就和只与物体各点相对于惯性中心的运动有关的"固有矩"相同。換句話說，在定义 $\boldsymbol{M}=\sum m[\boldsymbol{rV}]$ 中，应該以$[\boldsymbol{\Omega r}]$代 $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{M}=\sum m[\boldsymbol{r}[\boldsymbol{\Omega r}]]=\sum m\{r^2\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r\Omega})\},$$

或用張量来表示：

$$M_i=\sum m\{x_l^2\Omega_i-x_ix_k\Omega_k\}=\Omega_k\sum m\{x_l^2\delta_{ik}-x_ix_k\}。$$

最后，考虑到慣量張量的定义(32,2)，最后得到

$$M_i=I_{ik}\Omega_k。\tag{33,1}$$

如果 x_1, x_2, x_3 三条轴沿着物体的慣量主轴，那么这个公式就給出

$$M_1=I_1\Omega_1,\ \ M_2=I_2\Omega_2,\ \ M_3=I_3\Omega_3。\tag{33,2}$$

在球形陀螺的特殊情况下，所有三个主轉动慣量都相同，我們有

$$\boldsymbol{M}=I\boldsymbol{\Omega},\tag{33,3}$$

即矩向量与角速度向量成比例，因而与角速度有相同的方向。

在任意物体的一般情况下，一般說来，向量 $\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{\Omega}$ 的方向不同，只有当物体繞某一慣量主轴运动时，$\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{\Omega}$ 才有相同的方向。

現在来看不受任何外力作用的剛体的自由运动。我們将排开不引起兴趣的等速平动，因而所考察的只是物体的自由旋轉。

与所有的封閉系統一样，自由旋轉物体的冲量矩是一个常量。对于球形陀螺，条件 $\boldsymbol{M}=$常数。簡化为 $\boldsymbol{\Omega}=$常数。这就是說，繞固定轴的等速轉动不过是球形陀螺的一般情况。

轉子的情况同样簡單。这里也是 $\boldsymbol{M}=I\boldsymbol{\Omega}$，而且向量 $\boldsymbol{\Omega}$ 还垂

直于轉子的軸。所以轉子的自由旋轉是在一个平面上繞垂直于此平面的方向轉动。

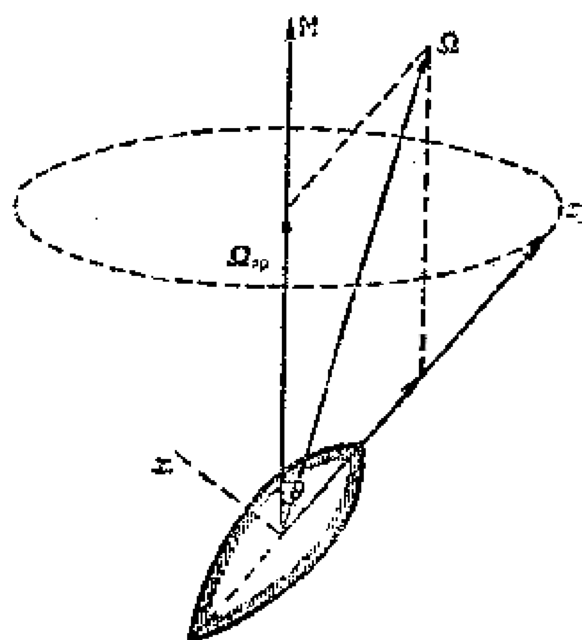


圖 46

要決定更复杂的对称陀螺的自由轉动，冲量矩守恒定律是足够的。

利用主軸 x_1, x_2（垂直于陀螺对称軸 x_3）选擇的任意性，我們选取軸 x_2 垂直于由常向量 $\boldsymbol{M}$ 和軸 x_3 的瞬时位置所决定的平面。这时 $M_2=0$，而从公式 (32, 2) 可知 Ω_2 亦等于 0。这就是說，向量 $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{\Omega}$, 同陀螺的軸任何时候都在同一平面上（圖 46）。由此同样可得出結論：陀螺軸上一切点的速度 $\boldsymbol{v}=[\boldsymbol{\Omega r}]$ 在每个时刻都垂直于上述平面，换句話說，陀螺的軸等速地（見下面）繞方向 $\boldsymbol{M}$ 旋轉，給出一个圓錐（所謂陀螺的**正規进动**）。进动的同时，陀螺本身还繞自己的軸等速旋轉。

这两种轉动的角速度不难用已知的冲量矩的大小 M 及陀螺軸对 M 方向的偏角 θ 来表示。陀螺自轉的角速度等于向量 $\boldsymbol{\Omega}$ 在此軸上的投影 Ω_3，即

$$\Omega_3=\frac{M_3}{I_3}=\frac{M}{I_3}\cos\theta。\tag{33,4}$$

为了决定进动速度 Ω_{np}，应当按照平行四边形的法則把向量 $\boldsymbol{\Omega}$ 分解为沿 x_3 軸和 $\boldsymbol{M}$ 的两个分量。第一个分量不能使陀螺的軸作任何移动，因此第二个則給出要求的进动角速度。由圖 46 可知，$\sin\theta\,\Omega_{np}=\Omega_1$，又由于 $\Omega_1=M_1/I_1=M\sin\theta/I_1$，于是我們得到

$$\Omega_{np}=\frac{M}{I_1}。\tag{33,5}$$

§34. 刚体运动方程

由于刚体在一般情况下有六个自由度，因此在一般的运动方程組中应包含六个独立方程。我們可把它們写成确定刚体的冲量和冲量矩两向量对时間的微商的方程式。

把組成刚体的每个質点的方程 $\dot{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{f}$（$\boldsymbol{p}$ 是冲量，而 $\boldsymbol{f}$ 是作用在質点上的力）相加就可得到这些方程式中的第一个，引入刚体的总冲量

$$\boldsymbol{P}=\sum \boldsymbol{p}=\mu \boldsymbol{V}$$

和作用于其上的总力 $\sum \boldsymbol{f}=\boldsymbol{F}$，我們得到

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}=\boldsymbol{F}。 \qquad (34,1)$$

虽然我們把 $\boldsymbol{F}$ 定义为所有作用在每一粒子上的力 $\boldsymbol{f}$ 的总和，其中亦包括質点間的相互作用力，但实际上包含在 $\boldsymbol{F}$ 中的只有从外源方面来的作用力。所有刚体本身的粒子間相互作用力互相抵消，事实上，当外力不存在时，作为封閉系統的刚体的冲量应該守恒，即应当有 $\boldsymbol{F}=0$。

如果 U 是刚体在外場中的位能，則力 $\boldsymbol{F}$ 可由位能对于刚体慣性中心坐标的微商来确定：

$$\boldsymbol{F}=-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{R}}。 \qquad (34,2)$$

事实上，当刚体平移 $\delta \boldsymbol{R}$ 时，它上面每一点的向徑 $\mathbf{r}$ 也改变这么多，因此位能的改变

$$\delta U=\sum \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}\,\delta \mathbf{r}=\delta \boldsymbol{R}\sum \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}=-\delta \boldsymbol{R}\sum \boldsymbol{f}=-\boldsymbol{F}\delta \boldsymbol{R}。$$

由于这个原因应該指出，方程式(34, 1)也可作为相对于慣性中心坐标的拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{V}}=\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{R}}$$

用拉格朗日函数(32,4)推出，对于拉格朗日函数(32,4)，

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{V}}=\mu \boldsymbol{V}=\boldsymbol{P}、\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{R}}=-\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{R}}=\boldsymbol{F}。$$

现在我們来推导第二个运动方程式，它确定冲量矩 $\boldsymbol{M}$ 对于时間的微商。为了簡化推导，选擇"静止"(慣性的)計算系統，使剛体的惯性中心相对于它在該时刻静止，是比較方便的。根据伽利略相对性原理，这样求得的运动方程式在任何别的惯性系統中也都是正确的。

我們有

$$\dot{\boldsymbol{M}}=\frac{d}{dt}\sum[\boldsymbol{r}\boldsymbol{p}]=\sum[\dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{p}]+\sum[\boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{p}}]。$$

由于我們对計算系統所作的选擇(即在其中 $\boldsymbol{V}=0$)，$\dot{\boldsymbol{r}}$ 在該时刻和速度 $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}$ 相等。既然向量 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$ 的方向一致，那么 $[\dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{p}]=0$。再把 $\dot{\boldsymbol{p}}$ 换成力 $\boldsymbol{f}$，最后可得

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt}=\boldsymbol{K}, \qquad (34,3)$$

式中

$$\boldsymbol{K}=\sum[\boldsymbol{r}\boldsymbol{f}]。\qquad (34,4)$$

向量 $[\boldsymbol{r}\boldsymbol{f}]$ 叫做 $\boldsymbol{f}$ 的**力矩**，因而 $\boldsymbol{K}$ 是所有作用于剛体上的力矩的和。就像总力 $\boldsymbol{F}$ 一样，在和(34,4)中实际上只需要考虑外力；根据冲量矩守恒定律，封閉体系内部的作用力矩之和应当为零。

一般說来，力矩像冲量矩一样，依賴于坐标原点(力矩相对于这点来确定)的选擇。在(34,3)，(34,4)中力矩是相对于剛体之惯性中心而确定的。

当把坐标原点移动距离 $\boldsymbol{a}$ 时，剛体質点的新向徑 $\boldsymbol{r}'$ 和旧向徑 $\boldsymbol{r}$ 的关系为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{a}$。所以

$$\boldsymbol{K}=\sum[\boldsymbol{r}\boldsymbol{f}]=\sum[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{f}]+\sum[\boldsymbol{a}\boldsymbol{f}]$$

或

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}'+[\boldsymbol{a}\boldsymbol{F}], \qquad (34,5)$$

由此可見，如果总力 $F=0$（这时我們説"力偶"作用于刚体上），那末力矩的大小将不依賴于坐标原点的选擇。

方程(34,3)可看作相对于"轉动坐标"的拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\Omega}}=\frac{\partial L}{\partial \varphi}。$$

事实上，对向量 $\boldsymbol{\Omega}$ 的分量来微分拉格朗日函数，我們得到

$$\frac{\partial L}{\partial \Omega_i}=I_{ik}\Omega_k=M_i。$$

当刚体轉一个无穷小角 $\delta\varphi$ 时，位能的改变等于

$$\delta U=-\sum \boldsymbol{f}\,\delta \boldsymbol{r}=-\sum \boldsymbol{f}\,[\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{r}]=-\delta\boldsymbol{\varphi}\sum[\boldsymbol{r}\boldsymbol{f}]=-\boldsymbol{K}\delta\boldsymbol{\varphi},$$

由此

$$\boldsymbol{K}=-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\varphi}}, \tag{34,6}$$

因而

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\varphi}}=-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\varphi}}=\boldsymbol{K}。$$

假定向量 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 互相垂直。在这种情况下总可找到这样的向量 $\boldsymbol{a}$，使得在公式(34,5)中 $\boldsymbol{K}'$ 变成零，于是

$$\boldsymbol{K}=[\boldsymbol{a}\boldsymbol{F}]。 \tag{34,7}$$

同时 $\boldsymbol{a}$ 的选擇不是單值的：增加平行于 $\boldsymbol{F}$ 的任意向量，等式(34,7)并不改变，因此，条件 $\boldsymbol{K}'=0$ 在动坐标系統中給出的不是一个确定定点，而只是一条确定的直綫。由此可見，当 $\boldsymbol{K}\perp\boldsymbol{F}$ 时，所有附加于其上的力的作用可归結为沿某一确定直綫作用的一个力 $\boldsymbol{F}$。

值得注意的是，均匀力場的情况就是如此，在均匀力場中，作用在質点上的力有 $\boldsymbol{f}=e\boldsymbol{E}$ 的形式，其中 $\boldsymbol{E}$ 是描述場的特性的不变向量，而量 e 确定質点相对于該場的特性[①]。在这种情况下我們有

① 例如：在均匀电場中，$\boldsymbol{E}$ 是电場强度，而 e 是粒子的电荷；在均匀重力場中，$\boldsymbol{E}$ 是重力加速度 $\boldsymbol{g}$，而 e 是粒子質量 m。

$$F = E\sum e,\ K = [\sum e\boldsymbol{r}\cdot E]。$$

假定 $\sum e \neq 0$，引入一个向徑 $\boldsymbol{r}_0$，它由公式

$$\boldsymbol{r}_0 = \frac{\sum e\boldsymbol{r}}{\sum e} \qquad (34.8)$$

确定。这时，关于总力矩我們得到下面簡單的表达式

$$K = [\boldsymbol{r}_0 F]。 \qquad (34.9)$$

由此可見，当剛体在均匀場中运动时，場的影响归結为一个"附加"于向徑为(34,8)的点上的力 F 的作用。这点的位置完全由剛体本身的性質决定，如在重力場中它与剛体的慣性中心重合。

§ 35. 欧勒角

前面已經指出，为了描述剛体的运动可以利用它的慣性中心的三个坐标和相对于靜止坐标系 XYZ 确定运动坐标系的軸 x_1，x_2，x_3 的指向的三个角。所謂**欧勒角**用作这三个角常常是很方便的。

由于現在我們只关心坐标軸間的夹角，因此我們把两个坐标原点选在一个点上(圖 47)。运动平面 x_1x_2 与不动平面 XY 交于被称为节綫的一条直綫上(圖 47 中的 ON)，节綫既垂直于軸 Z，又垂直于軸 x_3，我們选擇它的正方向使之符合向量积 $[\boldsymbol{z}\boldsymbol{x}_3]$ 的方向(其中 $\boldsymbol{z}$，$\boldsymbol{x}_3$ 是軸 Z 和 x_3 方向上的單位向量)。

作为确定軸 x_1，x_2，x_3 相对于軸 X，Y，Z 的位置的角我們利用下列三个角：軸 Z 与軸 x_3 之間的夹角 θ，軸 X 与軸 N 之間的夹角 φ，軸 N 与軸 x_1 之間的夹角 ψ。角 φ 和 ψ 分別在按螺旋法則所确定的繞軸 Z 和軸 x_3 方向上来計算。角 θ 可取从零到 π 的一切数值，而角 φ 和 ψ 可取从 0 到 2π 的一切数值[①]。

① 角度 θ 和 $\varphi - \frac{\pi}{2}$ 分別是 x_3 方向相对軸 X，Y，Z 的極角和方位角。同时 θ 和 $\frac{\pi}{2} - \psi$ 分別是 Z 方向相对 x_1、x_2、x_3 的極角和方位角。

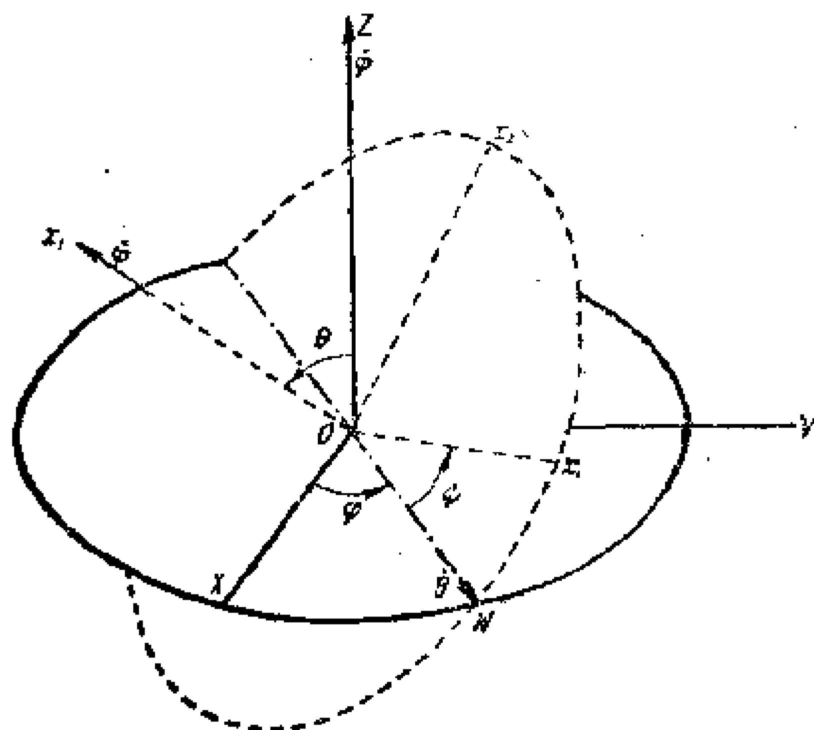


图 47.

现在通过欧勒角和它們的微商来表达角速度向量 Ω 在动軸 x_1, x_2, x_3 上的分量。为此，必須把角速度 $\dot\theta$, $\dot\varphi$, $\dot\psi$ 投射到这些軸上来。角速度 $\dot\theta$ 沿着节綫 ON 的方向，因而它在軸 x_1, x_2, x_3 上的分量为

$$\dot\theta_1=\dot\theta\cos\psi,\quad \dot\theta_2=-\dot\theta\sin\psi,\quad \dot\theta_3=0。$$

角速度 $\dot\varphi$ 沿着軸 Z 的方向，它在軸 x_3 上的投影等于 $\dot\varphi_3=\dot\varphi\cos\theta$，而在平面 x_1x_2 上的投影等于 $\dot\varphi\sin\theta$。把后一个投影分解为沿軸 x_1 和軸 x_2 的分量可得

$$\dot\varphi_1=\dot\varphi\sin\theta\sin\psi,\quad \dot\varphi_2=\dot\varphi\sin\theta\cos\psi。$$

最后，角速度 $\dot\psi$ 沿軸 x_3 的方向。

集合所有这些沿各个軸的分量，我們得到

$$\begin{aligned}\Omega_1&=\dot\varphi\sin\theta\sin\psi+\dot\theta\cos\psi,\\ \Omega_2&=\dot\varphi\sin\theta\cos\psi-\dot\theta\sin\psi,\\ \Omega_3&=\dot\varphi\cos\theta+\dot\psi。\end{aligned}\qquad(35,1)$$

如果选擇軸 x_1, x_2, x_3 沿着刚体慣量主軸，那么将(35,1)代入

(32,8)我們就得到用欧勒角来表示的轉动动能。

对于对称陀螺（也有 $I_1=I_2\neq I_3$），經簡單的运算后我們求得

$$T_{rot}=\frac{I_1}{2}(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2)+\frac{I_3}{2}(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})^2。\quad(35,2)$$

应当指出，利用对称陀螺慣量主軸 x_1, x_2 選擇的任意性，这个表示式也可以很簡地得到。如果認为軸 x_1 和节軸 ON 相合，即 $\psi=0$，那末对角速度分量我們有簡單的表示式

$$\Omega_1=\dot{\theta},\ \ \Omega_2=\dot{\varphi}\sin\theta,\ \ \Omega_3=\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}。\quad(35,3)$$

作为应用欧勒角的一个簡單例子，我們用它来决定我們已經知道的对称陀螺的自由轉动。

我們选擇靜止坐标系的 Z 軸在陀螺的恒定矩 $\boldsymbol{M}$ 的方向。运动坐标系的軸 x_3 的方向沿陀螺的軸，而軸 x_1 在給定时刻假設与节軸相合。这时借助公式(35,3)，我們求得 $\boldsymbol{M}$ 的分量

$$M_1=I_1\Omega_1=I_1\dot{\theta},\ \ M_2=I_1\Omega_2=I_1\dot{\varphi}\sin\theta,$$

$$M_3=I_3\Omega_3=I_3(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})。$$

另一方面，既然軸 x_1（节綫）垂直于軸 Z，所以我們有

$$M_1=0,\ \ M_2=M\sin\theta,\ \ M_3=M\cos\theta。$$

使这两种表示式相等可得下列方程：

$$\dot{\theta}=0,\ \ I_1\dot{\varphi}=M,\ \ I_3(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})=M\cos\theta。\quad(35,4)$$

第一个方程給出 $\theta=$ 常数，即陀螺軸对 $\boldsymbol{M}$ 方向的傾角不变。第二个方程确定[和(33,5)吻合]进动角速度 $\dot{\varphi}=M/I_1$。最后，第三个方程确定陀螺自轉角速度 $\Omega_3=M\cos\theta/I_3$。

習　題

1. 試积分下端点不动之重陀螺运动的問題(圖 48)。

解： 把运动坐标系和靜止坐标系的共同原点选在陀螺的不动点 O 上，而使軸 Z 沿竪直方向(圖 48)。在重力場中陀螺的拉格朗日函数

$$L=\frac{I_1}{2}(\dot\theta^2+\dot\varphi^2\sin^2\theta)+\frac{I_3+\mu l^2}{2}(\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta)^2-\mu gl\cos\theta$$

(μ 是陀螺質量，l 是从慣性中心到下端点的距离)。

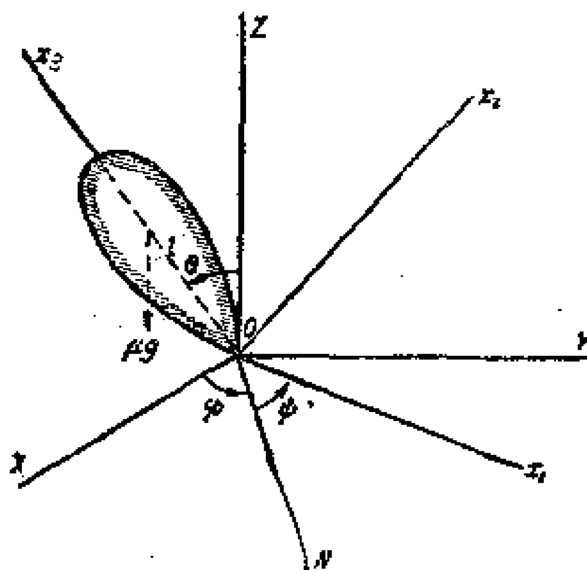


圖 48.

ψ 和 φ 是循环坐标。所以有两个运动积分：

$$p_\psi=\frac{\partial L}{\partial\dot\psi}=I_3'(\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta)=常数\equiv M_3, \tag{1}$$

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}=(I_1\sin^2\theta+I_3'\cos^2\theta)\dot\varphi+I_3'\dot\psi\cos\theta=常数\equiv M_z, \tag{2}$$

这里我們采用了符号 $I_3'=I_3+\mu l^2$(量 p_ψ 与 p_φ 是相对 O 点所确定的轉动慣量分别在軸 x_3 与軸 Z 上之分量)。此外，还有能量

$$E=\frac{I_1}{2}(\dot\theta^2+\dot\varphi^2\sin^2\theta)+\frac{I_3'}{2}(\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta)^2+\mu gl\cos\theta \tag{3}$$

守恒。

从方程(1)和(2)可求得

$$\dot\varphi=\frac{M_z-M_3\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}, \tag{4}$$

$$\dot\psi=\frac{M_3}{I_3'}-\cos\theta\frac{M_z-M_3\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}。 \tag{5}$$

借助于这些等式从(3)的能量中除去 $\dot\varphi$ 与 $\dot\psi$ 我們便得到

$$E'=\frac{I_1}{2}\dot\theta^2+U_{эфф}(\theta),$$

这里采用了符号

$$E' = E - \frac{M_3^2}{2I_3} - mgl,$$

$$U_{\text{эфф}}(\theta) = \frac{(M_z - M_3\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta} - mgl(1-\cos\theta)。\tag{6}$$

由此确定θ并分离变量可得

$$t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{I_1}\left(E' - U_{\text{эфф}}(\theta)\right)}}\tag{7}$$

（是椭圆积分）。其次角φ和ψ可借助于方程(4)，(5)表成积分形式的θ的函数。

在运动中角θ的变化范圍决定于条件$E' \geq U_{\text{эфф}}(\theta)$，函数$U_{\text{эфф}}(\theta)$（当$M_z \neq M_3$时）在$\theta=0$及$\theta=\pi$处趋向$+\infty$，而在这两个值之間它經过一最小值，因此，方程式$E' = U_{\text{эфф}}(\theta)$有两个根，它們决定陀螺軸对竖直方向偏角的界限$\theta_1$和$\theta_2$。

当角θ从θ_1变到θ_2时，微商$\dot{\varphi}$改变不改变符号，要看差$M_z - M_3\cos\theta$在这个范圍内改变不改变符号。在第二种情况下，陀螺軸繞竖直方向單調地进动，同时上下振动（所謂章动）（圖49，a，曲綫是陀螺軸在以陀螺不动点为中心的球面上所划的印迹）。在前一种情况下，在两个界圓上进动方向相反，所以陀螺軸繞竖直方向旋轉，同时描画出許多圈（圖49，б）。最后，如果θ_1，θ_2的值当中有一个与差$M_z - M_3\cos\theta$的零点重合，则在相应的界圓上$\dot{\varphi}$和$\dot{\theta}$同时等于零，所以陀螺軸描画出像圖49，в所示的軌迹。

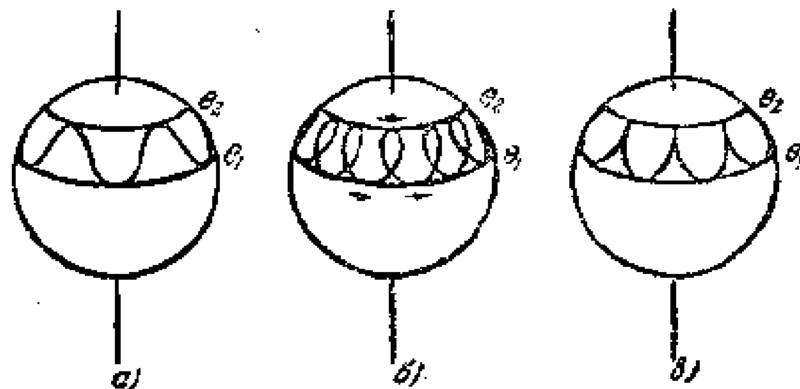


圖 49.

2. 試求陀螺繞竖直軸稳定轉动的条件。

解：当$\theta=0$时，軸x_3和軸Z相合，于是$M_3 = M_z$，$E'=0$。如果$\theta=0$对应于函数$U_{\text{эфф}}(\theta)$的最小值，那末繞这个軸的轉动将是稳定的。当θ很小时

我們有

$$U_{\text{эфф}} \approx \left(\frac{M_3^2}{8I_1} - \frac{\mu g l}{2}\right)\theta^2,$$

由此求得条件 $M_3^2 > 4I_1\mu g l$ 或

$$\Omega_3^2 > \frac{4I_1\mu g l}{I_3^2}。$$

3. 当陀螺的自轉动能比它在重力場中的能量大很多时(卽所謂快速陀螺),試确定它的运动。

解: 在一級近似中,如果忽略重力場,那末陀螺軸將繞矩 $\boldsymbol{M}$ 的方向自由进动(在現在这种情况下对应着陀螺的章动),根据(33,5)章动角速度

$$\Omega_{\text{нут}} = \frac{M}{I_1}。 \quad (1)$$

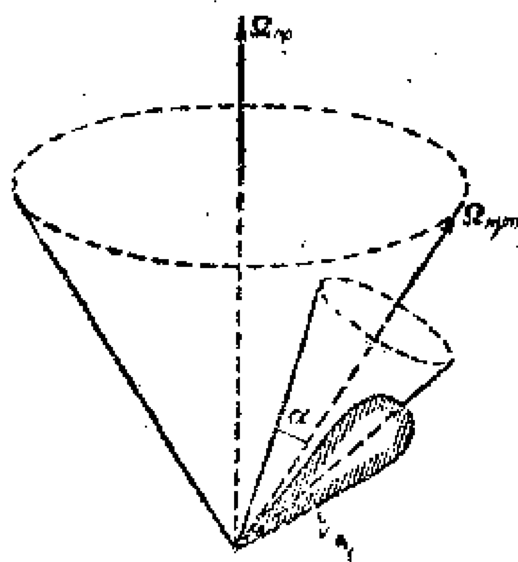


圖 50.

在更高級的近似中,出現矩 M 繞竖直方向緩慢地进动(圖 50)。为了决定这进动的速度我們在一个章动周期內来平均准确的运动方程(34,3)

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} = \boldsymbol{K}。$$

作用在陀螺上的重力的矩等于 $\boldsymbol{K} = \mu l[\boldsymbol{n}_3\boldsymbol{g}]$,其中 $\boldsymbol{n}_3$ 是在陀螺軸方向上的單位向量。出于对称性的考慮,很显然,按"章动圓錐"来平均 $\boldsymbol{K}$ 的結果不过是用向量 n_3 在 M 方向的投影 $\cos\alpha\cdot\boldsymbol{M}/M$ 来代替向量 $\boldsymbol{n}_3$ (α 是 $\boldsymbol{M}$ 和陀螺軸之間的夾角)。这样一来,我們便得到方程

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} = -\cos\alpha\frac{\mu l}{M}[\boldsymbol{g}\boldsymbol{M}]。$$

它表示向量 $\boldsymbol{M}$ 繞 $\boldsymbol{g}$ 的方向(竖直方向)进动,其平均角速度

$$\bar{\boldsymbol{\Omega}}_{\text{пр}} = -\frac{\mu l\cos\alpha}{M}\boldsymbol{g} \quad (2)$$

(較 $\Omega_{\text{нут}}$ 小很多)。

在我們研究的近似計算中,包含在公式(1)和(2)中的量 M 和 $\cos\alpha$ 是常量(虽然严格地說他們并不是运动积分)。他們同严格的守恒量 E 和 M_3 可以用下面的关系式联系(具有同样的准确度):

$$M_3 = M\cos\alpha,$$

$$E \approx \frac{M^2}{2}\left(\frac{\cos^2\alpha}{I_3'} + \frac{\sin^2\alpha}{I_1}\right)。$$

§ 36. 欧勒方程

在 § 34 中所写的运动方程是相对于静止坐标系的，这点体现在方程(34,1)和(34,3)中的微商 $d\boldsymbol{P}/dt$ 和 $d\boldsymbol{M}/dt$ 乃是相对于这一系統向量 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 的改变。但是，其軸沿着慣量主軸方向的运动坐标系中，剛体的轉动矩 $\boldsymbol{M}$ 的分量同角速度的分量之間有着最簡單的关系。为了利用这一最簡單的关系必須預先把运动方程加以改变，使屬于运动坐标 x_1, x_2, x_3。

令 $d\boldsymbol{A}/dt$ 是某一向量 $\boldsymbol{A}$ 相对于静止坐标系的改变速度。如果向量 $\boldsymbol{A}$ 相对于轉动坐标系不改变，那么它相对于静止坐标系的改变就是仅仅由轉动所引起的，因而

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = [\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{A}]$$

[見 § 9，在 § 9 中已指出，这样的公式就像(9, 1)(9, 2)一样，对任何向量都是正确的]。在一般的情况下，等式的右边还应补充一項向量 $\boldsymbol{A}$ 相对于运动坐标系的改变速度，把这一速度表示成 $d'\boldsymbol{A}/dt$ 时，我們得到

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \frac{d'\boldsymbol{A}}{dt} + [\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{A}]。 \tag{36,1}$$

借助于(36,1)，我們可以立刻把方程(34,1)(34,3)改写成

$$\frac{d'\boldsymbol{P}}{dt} + [\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{P}] = \boldsymbol{F},\quad \frac{d'\boldsymbol{M}}{dt} + [\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{M}] = \boldsymbol{K}。 \tag{36,2}$$

旣然这里对时間的微分是在运动坐标系中，那么我們就可以直接把方程投影到这系統各个軸上，写出

$$\left(\frac{d'\boldsymbol{P}}{dt}\right)_1 = \frac{dP_1}{dt}, \ldots,\quad \left(\frac{d'\boldsymbol{M}}{dt}\right)_1 = \frac{dM_1}{dt}, \ldots,$$

式中指标 1, 2, 3 是指在軸 x_1, x_2, x_3 上的分量。这时在第一个方

程中把 $\boldsymbol{P}$ 换成 $\mu\boldsymbol{V}$，我們便得到

$$\mu\left(\frac{dV_1}{dt}+\Omega_2V_3-\Omega_3V_2\right)=F_1,$$
$$\mu\left(\frac{dV_2}{dt}+\Omega_3V_1-\Omega_1V_3\right)=F_2, \qquad (36,3)$$
$$\mu\left(\frac{dV_3}{dt}+\Omega_1V_2-\Omega_2V_1\right)=F_3。$$

假定我們选擇軸 x_1, x_2, x_3 沿慣量主軸的方向，那么在(36,2)的第二个方程中我們可写出 $M_1=I_1\Omega_1$ 等等，因而得到

$$I_1\frac{d\Omega_1}{dt}+(I_3-I_2)\Omega_2\Omega_3=K_1,$$
$$I_2\frac{d\Omega_2}{dt}+(I_1-I_3)\Omega_3\Omega_1=K_2, \qquad (36,4)$$
$$I_3\frac{d\Omega_3}{dt}+(I_2-I_1)\Omega_1\Omega_2=K_3。$$

方程(36,4)叫**欧勒方程**。

在自由轉动的情况下 $\boldsymbol{K}=0$，于是欧勒方程取如下形式：

$$\frac{d\Omega_1}{dt}+\frac{I_3-I_2}{I_1}\Omega_2\Omega_3=0,$$
$$\frac{d\Omega_2}{dt}+\frac{I_1-I_3}{I_2}\Omega_3\Omega_1=0, \qquad (36,5)$$
$$\frac{d\Omega_3}{dt}+\frac{I_2-I_1}{I_3}\Omega_1\Omega_2=0。$$

作为一个例子，我們把这些方程应用于过去我們研究过的对称陀螺的自由轉动。假設 $I_1=I_2$，则从第三个方程可得 $\dot{\Omega}_3=0$，即 $\Omega_3=$ 常数，其次我們把前二个方程写成

$$\dot{\Omega}_1=-\omega\Omega_2,\ \dot{\Omega}_2=\omega\Omega_1,$$

这里引入了常量

$$\omega=\Omega_3\frac{I_3-I_1}{I_1}。 \qquad (36,6)$$

把第二式乘 i 并和第一式相加，則得

$$\frac{d}{dt}(\Omega_1+i\Omega_2)=i\omega(\Omega_1+i\Omega_2),$$

由此
$$\Omega_1+i\Omega_2=Ae^{i\omega t},$$

式中 A 是常数，它可以認为是实数（只要对时間計算起点作适当的选擇），因而这时

$$\Omega_1=A\cos\omega t,\quad \Omega_2=A\sin\omega t。\tag{36,7}$$

这一結果表明，角速度在垂直于陀螺軸的平面上的投影的数值是不变的（$\sqrt{\Omega_1^2+\Omega_2^2}=A$），并且以角速度 ω 在这平面上旋轉。既然 Ω_3 在陀螺軸上的投影也是不变的，那末我們可以得出下列結論：向量 $\boldsymbol{\Omega}$ 的数值不發生变化，并且以角速度 ω 繞陀螺軸等速轉动。由于向量 $\boldsymbol{\Omega}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 的分量間有 $M_1=I_1\Omega_1$，$M_2=I_2\Omega_2$，$M_3=I_3\Omega_3$ 的关系，很明显，矩向量 $\boldsymbol{M}$ 也作同样的运动（相对陀螺的軸）。

自然，所得到的情形仅仅是在 § 33 和 § 35 中相对于靜止坐标系研究过的陀螺运动的另一模样。向量 $\boldsymbol{M}$（圖 48 中的軸 Z）繞 x_3 方向轉动的角速度和欧勒角中的角速度 $\dot\psi$ 相等。借(35,4)的帮助我們就有

$$\dot\psi=\frac{M\cos\theta}{I_3}-\dot\varphi\cos\theta=M\cos\theta\left(\frac{1}{I_3}-\frac{1}{I_1}\right)$$

或
$$-\dot\psi=\Omega_3\frac{I_3-I_1}{I_1},$$

这和(36,6)一致。

§ 37 不对称陀螺

我們把欧勒方程用到更复杂的关于不对称陀螺（三个慣量矩都不同）自由轉动的問題上去。为了确定起見，我們認为

$$I_3>I_2>I_1。\tag{37,1}$$

欧勒方程的两个积分早就知道了。它們由能量和冲量矩的守

恒定律給出，并由下列等式表示：

$$I_1\Omega_1^2+I_2\Omega_2^2+I_3\Omega_3^2=2E,\qquad(37,2)$$
$$I_1^2\Omega_1^2+I_2^2\Omega_2^2+I_3^2\Omega_3^2=M^2,$$

这里能量 E 和矩的絕对値 M 是給定的常数。这两个等式用向量 $\boldsymbol{M}$ 的分量来表示則有如下形式：

$$\frac{M_1^2}{I_1}+\frac{M_2^2}{I_2}+\frac{M_3^2}{I_3}=2E,\qquad(37,3)$$

$$M_1^2+M_2^2+M_3^2=M^2。\qquad(37,4)$$

从这兒已經可以作出一些关于陀螺运动性質的結論。为此我們注意到，方程(37,3)和(37,4)，(在以 M_1, M_2, M_3 为軸的几何学中)分别是以

$$\sqrt{2EI_1}\;,\;\sqrt{2EI_2}\;,\;\sqrt{2EI_3}$$

为半長軸的橢球表面方程和以 M 为半徑的球表面方程。当向量 $\boldsymbol{M}$ (相对陀螺的慣量軸)移动时，它的端点沿着这两个表面的交綫运动(在圖 51 上画出了一系列这样的綫，它們是一个橢球和具有

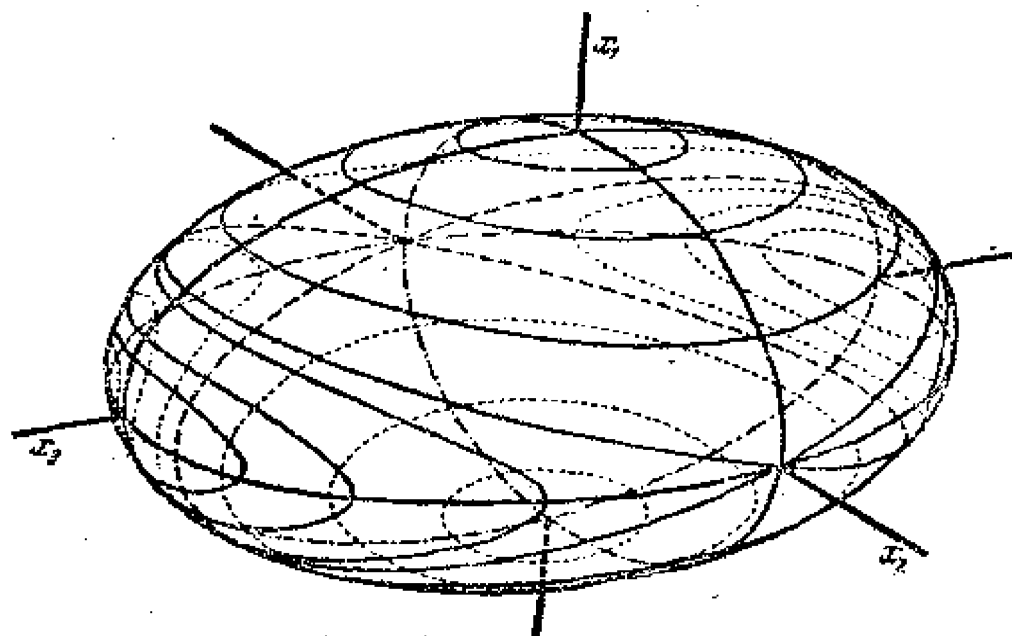


圖 51

不同半徑的許多球的交綫)。交綫的存在本身显然須由下面不等

式来保証：

$$2EI_1 < M^2 < 2EI_3, \tag{37,5}$$

在几何上这不等式意味着球(37,4)的半徑位于橢球(37,3)的最大和最小半軸之間。

讓我們来考察向量 M 終点的这些"軌迹"[①] 随量 M 的变化(在給定能量 E 的情况下)。当 M^2 只比 $2EI_1$ 大一点时，球和橢球交于两个很小的封閉曲綫，它們包圍 x_1 軸并分别靠近橢球的两極(当 $M^2 \to 2EI_1$ 时这两条曲綫縮成两个点——極点)。随着 M^2 的增大，曲綫逐漸扩張，而当 $M^2 = 2EI_2$ 时，曲綫变成两个平面曲綫(橢圓)，并且相交于軸 x_2 上的極点。而当 M^2 再进一步增大时，产生两个分开的，圍繞軸 x_3 上之二極点的閉封曲綫。当 $M^2 \to 2EI_3$ 时，它們就縮成这两个極点。

首先我們指出，軌迹的封閉性意味着向量 M 相对陀螺运动的周期性，在一个周期內，M 描繪一个圓錐面而且回到原位置。

此外我們还应指出軌迹在橢球不同極点附近的本質上不同的性質。在軸 x_1，x_3 的極点附近，軌迹完全分布在極点周圍，而通过軸 x_2 極点附近的軌迹在自己的未来路程上則远离極点。这种差別对应着陀螺繞自己慣量軸轉动时穩定性的不同性質。繞軸 x_1 和 x_3 的轉动(相应于陀螺三个轉动慣量中最大的一个和最小的一个)，当对这些軸偏离很小时陀螺仍繼續在原位置周圍运动，因此在这个意义上来說是穩定的。繞軸 x_2 的轉动是不穩定的，任意小的偏离都能产生使陀螺逐漸远离原位置的运动。

为了求 Ω 的分量(或与之成正比的 M 的分量)对时間的依賴关系，我們轉向欧勒方程(36,5)。我們利用(37,2)，(37,3)把 Ω_1 和 Ω_3 以 Ω_2 表示出来：

---

① 由向量 Ω 的端点画出的类似曲綫称为蜷蹤。

$$\left.\begin{aligned}\Omega_1^2&=\frac{1}{I_1(I_3-I_1)}\{(2EI_3-M^2)-I_2(I_3-I_2)\Omega_2^2\},\\ \Omega_3^2&=\frac{1}{I_3(I_3-I_1)}\{(M^2-2EI_1)-I_2(I_2-I_1)\Omega_2^2\},\end{aligned}\right\}\quad(37,6)$$

代入(36,5)的第二个方程，我們求得

$$\frac{d\Omega_2}{dt}=\frac{I_3-I_1}{I_2}\Omega_1\Omega_3=$$

$$=\frac{1}{I_2\sqrt{I_1I_3}}\{[(2EI_3-M^2)-I_2(I_3-I_2)\Omega_2^2][(M^2-2EI_1)-$$

$$-I_2(I_2-I_1)\Omega_2^2]\}^{1/2}。\quad(37,7)$$

在这方程中分离变量并积分，我們便得到椭圆积分形式的函数 $t(\Omega_2)$。为了确定起見，在把它化成标准形式时，我們認为

$$M^2>2EI_2,$$

(在相反的情况下，在下面的一切公式中应該使指标 1，3 对調)。代替 t 和 Ω_2 我們引入新变量

$$\tau=t\sqrt{\frac{(I_3-I_2)(M^2-2EI_1)}{I_1I_2I_3}},\quad s=\Omega_2\sqrt{\frac{I_2(I_3-I_2)}{2EI_3-M^2}},\quad(37,8)$$

并按

$$k^2=\frac{(I_2-I_1)(2EI_3-M^2)}{(I_3-I_2)(M^2-2EI_1)}\quad(37,9)$$

引入正参量 $k^2<1$。这时可得

$$\tau=\int_0^s\frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}$$

(假定我們选择时間計算起点在 $\Omega_2=0$ 的时刻)，大家知道，在变换这一积分时要产生雅可比椭圆函数之一

$$s=\operatorname{sn}\tau,$$

Ω_2 对时間的依賴关系即由它确定。而函数 $\Omega_1(t)$ 和 $\Omega_3(t)$ 根据等式(37,6)通过 $\Omega_2(t)$ 表达。考虑到另外两个椭圆函数的定义

$$\operatorname{cn}\tau=\sqrt{1-\operatorname{sn}^2\tau},\quad\operatorname{dn}\tau=\sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2\tau},$$

最后可得下列公式：

$$\Omega_1=\sqrt{\frac{2EI_3-M^2}{I_1(I_3-I_1)}}\,\mathrm{cn}\,\tau,$$

$$\Omega_2=\sqrt{\frac{2EI_3-M^2}{I_2(I_3-I_2)}}\,\mathrm{sn}\,\tau, \qquad (37,10)$$

$$\Omega_3=\sqrt{\frac{M^2-2EI_1}{I_3(I_3-I_1)}}\,\mathrm{dn}\,\tau。$$

函数(37,10)是周期性的，如所周知，它們按变量 τ 的周期等于 $4K$，这里 K 是第一类全椭圆积分：

$$K=\int_0^1\frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}。 \qquad (37,11)$$

因而，按时間的周期由表示式

$$T=4K\sqrt{\frac{I_1I_2I_3}{(I_3-I_2)(M^2-2EI_1)}} \qquad (37,12)$$

給出。經过这样長的时間后，相对于陀螺軸，向量 $\boldsymbol{\Omega}$ 轉回自己的原位置(相对于靜止坐标系，陀螺本身絕不轉回原位置——見下面)。

自然，当 $I_1=I_2$ 时，公式(37,10)轉化成上节所求得的对称陀螺的公式。事实上，当 $I_1\to I_2$ 时，参量 $k^2\to 0$，椭圓函数蛻化为圓函数：

$$\mathrm{sn}\,\tau\to\sin\tau,\quad \mathrm{cn}\,\tau\to\cos\tau,\quad \mathrm{dn}\,\tau\to 1,$$

因而我們又回到了公式(36,7)。

当 $M^2=2EI_3$ 时我們有 $\Omega_1=\Omega_2=0$，$\Omega_3=$ 常数，即向量 $\boldsymbol{\Omega}$ 的方向永远沿着慣量軸 x_3。这个情形对应着陀螺繞軸 x_3 等速轉动。同样，当 $M^2=2EI_1$ 时(这时 $\tau\equiv 0$)，我們有繞軸 x_1 的等速轉动。

現在我們来确定作为时間函数的陀螺在空間的絕对运动(相对于靜止坐标系 XYZ)。为此引入陀螺的軸 x_1, x_2, x_3 和軸 X, Y, Z 之間的欧勒角 ψ, φ, θ，并选擇軸 Z 沿着常向量 $\boldsymbol{M}$ 的方向。旣然，軸 Z 的方向相对于軸 x_1, x_2, x_3 的極角和方位角分别等于 θ

和$\frac{\pi}{2}-\psi$（見145頁注），那末把向量 $\boldsymbol{M}$ 投影到 x_1, x_2, x_3 上去，我們便得到

$$
\begin{aligned}
M \sin\theta \sin\psi &= M_1 = I_1\Omega_1, \\
M \sin\theta \cos\psi &= M_2 = I_2\Omega_2, \\
M \cos\theta &= M_3 = I_3\Omega_3。
\end{aligned}
\qquad (37,13)
$$

由此

$$
\cos\theta = \frac{I_3\Omega_3}{M}, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{I_1\Omega_1}{I_2\Omega_2}, \qquad (37,14)
$$

再利用公式(37,10)我們求得

$$
\begin{aligned}
\cos\theta &= \sqrt{\frac{I_3(M^2-2EI_1)}{M^2(I_3-I_1)}}\,\operatorname{dn}\tau, \\
\operatorname{tg}\psi &= \sqrt{\frac{I_1(I_3-I_2)}{I_2(I_3-I_1)}}\,\frac{\operatorname{cn}\tau}{\operatorname{sn}\tau},
\end{aligned}
\qquad (37,15)
$$

角 θ 和 ψ 对时間的依賴关系即由此确定，和向量 $\boldsymbol{\Omega}$ 的分量一起它們都是周期函数，而周期为(37,12)。

公式(37,13)中并不含角 φ，因而要計算它，就必須注意用欧勒角对时間的导数来表达 $\boldsymbol{\Omega}$ 分量的公式(35,1)。从等式

$$
\begin{aligned}
\Omega_1 &= \dot\varphi \sin\theta \sin\psi + \dot\theta \cos\psi, \\
\Omega_2 &= \dot\varphi \sin\theta \cos\psi - \dot\theta \sin\psi
\end{aligned}
$$

中消去 $\dot\theta$ 可得

$$
\dot\varphi = \frac{\Omega_1 \sin\psi + \Omega_2 \cos\psi}{\sin\theta},
$$

然后利用公式(37,13)，我們便求得

$$
\frac{d\varphi}{dt} = M\frac{I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2}{I_1^2\Omega_1^2 + I_2^2\Omega_2^2}。 \qquad (37,16)
$$

由此可用求积的方法来确定函数 $\varphi(t)$，但被积式子很复杂地包含着橢圓函数。用一系列相当复杂的变换，这一积分可用所謂 θ 函数来表达，我們不进行計算[1]而仅仅指出計算的最后結果。

[1] 这些計算可以在 E. T. Уиттекер 所著 Аналитическая динамика(ОНТИ, 1937)一書中找到。

函数 $\varphi(t)$ 可表达成(准确到一任意相加常数)两项和的形式:

$$\varphi(t)=\varphi_1(t)+\varphi_2(t), \tag{37,17}$$

其中之一由公式

$$e^{2i\varphi_1(t)}=\frac{\theta_{01}\left(\frac{2t}{T}-i\alpha\right)}{\theta_{01}\left(\frac{2t}{T}+i\alpha\right)} \tag{37,18}$$

給出,式中 θ_{01} 是 θ 函数,而 α 是由下面等式决定的实常数:

$$\operatorname{sn}(i2\alpha K)=i\sqrt{\frac{I_3(M^2-2EI_1)}{I_1(2EI_3-M^2)}} \tag{37,19}$$

[K 和 T 取自(37,11),(37,12)]。(37,18)右边的函数是周期为 $\frac{T}{2}$ 的周期函数,因此 $\varphi_1(t)$ 在 T 时間内改变 2π。(37,17)的第二部份由下列公式給出:

$$\varphi_2(t)=2\pi\frac{t}{T'},\quad \frac{1}{T'}=\frac{M}{2\pi I_1}-\frac{i\theta'_{01}(i\alpha)}{\pi T\theta_{01}(i\alpha)}。 \tag{37,20}$$

这个函数在时間 T' 内增長 2π。由此可見,运动按 φ 来說,乃是两个周期性改变的合成,其中一个周期 (T) 与角 ψ 及 θ 的改变周期相等,而另一个 (T') 与前一个是不可通約的。后一种情况使得陀螺在本身运动时,严格說来任何时候都不能轉回到自己的原位置。

習　題

1. 試确定陀螺繞靠近慣量軸 x_3 (或 x_1) 的軸的自由轉动。

解: 設軸 x_3 接近于 $\boldsymbol{M}$ 方向。于是分量 M_1, M_2 是很小的量,而 $M_3\approx M$ (准确到一級小量)。以同样的准确度,歐勒方程中的前两个可寫成

$$\frac{dM_1}{dt}=\left(1-\frac{I_3}{I_2}\right)\Omega_0M_2,$$

$$\frac{dM_2}{dt}=\left(\frac{I_3}{I_1}-1\right)\Omega_0M_1,$$

这里我們引入了常数 $\Omega_0=M/I_3$。依据一般的法則,設 M_1 和 M_2 的解是正比

于 $e^{i\omega t}$ 的形式，于是我們得到頻率 ω 的值

$$\omega=\Omega_0\sqrt{\left(\frac{I_3}{I_1}-1\right)\left(\frac{I_3}{I_2}-1\right)}。\tag{1}$$

而对于 M_1 和 M_2 本身我們得到

$$M_1=Ma\sqrt{\frac{I_3}{I_2}-1}\cos\omega t,\quad M_2=Ma\sqrt{\frac{I_3}{I_1}-1}\sin\omega t,\tag{2}$$

其中 a 是小的任意常数。这些公式确定向量 $\boldsymbol{M}$ 相对陀螺的运动，在圖 51 中，这运动对应于向量 $\boldsymbol{M}$ 的端点不断重复描画（頻率为 ω）一个繞軸 x_3 極点的小橢圓。

为了决定陀螺在空間的絕对运动，我們来求它的欧勒角。在現在这种情况下，軸 x_3 对軸 Z（$\boldsymbol{M}$ 方向）的偏角 θ 很小，因而按照公式(37,14)，

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{M_1}{M_2},$$

$$\theta^2\approx2(1-\cos\theta)=2\left(1-\frac{M_3}{M}\right)\approx\frac{M_1^2+M_2^2}{M^2},$$

将(2)代入，我們便得到

$$\operatorname{tg}\psi=\sqrt{\frac{I_1(I_3-I_2)}{I_2(I_3-I_1)}}\operatorname{ctg}\omega t,$$

$$\theta^2=a^2\left[\left(\frac{I_3}{I_2}-1\right)\cos^2\omega t+\left(\frac{I_3}{I_1}-1\right)\sin^2\omega t\right]。\tag{3}$$

为了求得角 φ，我們注意到，根据(35,1)中的第三个公式，当 $\theta\ll1$ 时，

$$\Omega_0\approx\Omega_3\approx\dot\psi+\dot\varphi。$$

因此

$$\varphi=\Omega_0t-\psi\tag{4}$$

（略去积分任意常数）。

如果直接观察陀螺三慣量軸方向（这些軸上的單位向量我們用 $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{n}_3$ 表示）的变化，則可得到关于陀螺运动性質的更直观的概念。向量 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$ 以頻率 Ω_0 在平面 XY 上等速轉动，同时在橫方向上以頻率 ω 作微振动，这些振动由它們的 Z 分量确定，对它們的 Z 分量我們有

$$n_{1Z}\approx\frac{M_1}{M}=a\sqrt{\frac{I_3}{I_2}-1}\cos\omega t,$$

$$n_{2Z}\approx\frac{M_2}{M}=a\sqrt{\frac{I_3}{I_1}-1}\sin\omega t。$$

对向量 $\boldsymbol{n}_3$，以同样的精确度我們有

$$n_{3x}\approx\theta\sin\varphi,\quad n_{3y}\approx-\theta\cos\varphi,\quad n_{3z}\approx 1$$

(相对軸 X, Y, Z, 向量 n_3 方向的極角和方位角等于 θ 和 $\varphi-\frac{\pi}{2}$，見 145 頁注)。其次得出[这时利用公式(37,13)]

$$n_{3x}=\theta\sin(\Omega_0t-\psi)=\theta\sin\Omega_0t\cos\psi-\theta\cos\Omega_0t\sin\psi=$$

$$=\frac{M_2}{M}\sin\Omega_0t-\frac{M_1}{M}\cos\Omega_0t=$$

$$=a\sqrt{\frac{I_3}{I_1}-1}\,\sin\Omega_0t\sin\omega t-a\sqrt{\frac{I_3}{I_2}-1}\,\cos\Omega_0t\cos\omega t,$$

最后，

$$n_{3x}=-\frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{I_3}{I_1}-1}+\sqrt{\frac{I_3}{I_2}-1}\right)\cos(\Omega_0+\omega)t+$$

$$+\frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{I_3}{I_1}-1}-\sqrt{\frac{I_3}{I_2}-1}\right)\cos(\Omega_0-\omega)t。$$

同理

$$n_{3y}=-\frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{I_3}{I_1}-1}+\sqrt{\frac{I_3}{I_2}-1}\right)\sin(\Omega_0+\omega)t+$$

$$+\frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{I_3}{I_1}-1}-\sqrt{\frac{I_3}{I_2}-1}\right)\sin(\Omega_0-\omega)t。$$

由此可見，向量 n_3 的运动是以频率 $(\Omega_0\pm\omega)$ 繞 Z 軸的两个轉动的和。

2. 試确定当 $M^2=2EI_2$ 时陀螺的自由轉动。

解：在圖 51 中，这种情况对应于向量 $\boldsymbol{M}$ 端点沿通过軸 x_2 上之極点的曲綫移动。

方程(37,7)取如下形式：

$$\frac{ds}{d\tau}=1-s^2,\quad \tau=t\sqrt{\frac{(I_2-I_1)(I_3-I_2)}{I_1I_3}}\Omega_0,\quad s=\frac{\Omega_2}{\Omega_0},$$

这里引入了符号 $\Omega_0=M/I_2=2E/M$。对此方程积分，然后运用公式(37, 6)，我們便得到

$$\Omega_1=\Omega_0\sqrt{\frac{I_2(I_3-I_2)}{I_1(I_3-I_1)}}\,\frac{1}{\operatorname{ch}\tau},$$

$$\Omega_2=\Omega_0\operatorname{th}\tau,$$

$$\Omega_3=\Omega_0\sqrt{\frac{I_2(I_2-I_1)}{I_3(I_3-I_1)}}\,\frac{1}{\operatorname{ch}\tau}。$$

为了描述陀螺的絕对运动，我們引入歐勒角，把 θ 定义为軸 Z ($\boldsymbol{M}$ 方向)和陀螺慣量軸 x_2 (而不像正文中是 x_3)。在联系向量 $\boldsymbol{\Omega}$ 的分量和歐勒角之間的公式(37,14)，(37,16)中，这时应当施行指标的循环替換 123→312。然后

把式(1)代入这些公式,我們便得到

$$\cos\theta = \operatorname{th}\tau,\quad \varphi = \Omega_0 t + \text{常数},$$

$$\operatorname{tg}\psi = \sqrt{\frac{I_3(I_2 - I_1)}{I_1(I_2 - I_3)}}。$$

从所得的公式可見,向量 Ω 按漸近綫方式(当 $t\to\infty$ 时)趋向軸 x_3,同时軸 x_2 按漸近綫方式趋向静止軸 Z。

§38. 刚体的接触

从运动方程式(34,1)和(34,3)中已經可以看出,刚体的平衡条件是作用其上的总力和总力矩等于零,即

$$\boldsymbol{F} = \sum \boldsymbol{f} = 0,\quad \boldsymbol{K} = \sum[\boldsymbol{r}\boldsymbol{f}] = 0。\qquad (38,1)$$

这里是对所有加于物体的外力求和,$\boldsymbol{r}$ 是“着力点”的向徑。在这种情况下,确定力矩所相对的点(坐标原点)可以任意选择,因为当 $\boldsymbol{F}=0$ 时,$\boldsymbol{K}$ 的数值与此选择无关[見式(34,5)]。

如果我們討論的是相互接触的刚体体系,那么在平衡时,对于每个刚体条件(38,1)都应分别成立。这时从与刚体相接触的其他刚体方面来的作用力也都算作外力。这些力是加于相互接触点上,因而称为**反作用力**。显然,两个刚体相互反作用力大小相等,而方向相反。

在一般情况下,反作用力的大小和方向都由刚体平衡方程(38,1)的共同解决定。但在某些情况下,反作用力的方向业已由問題的条件給出。譬如說,如果两刚体可沿表面彼此自由滑动,那么,它們之間的反作用力应沿着表面的法綫方向。

如果接触刚体相对运动,那么,除反作用力以外,还出現消耗性的力——**摩擦力**。

接触刚体的相对运动的两种可能形式是**滑动**和**滚动**。在滑动时,反作用力垂直于接触面,而摩擦力却沿面的切綫方向。

純粹滚动的特点是在接触点沒有刚体的相对运动,換句話說,

滚动着的物体仿彿每一时刻都被固定在接触点上一样。这时，反作用力的方向是任意的，也就是說，不一定垂直于接触面。滚动摩擦力是以阻碍滚动的附加力矩的形式显示出来。

如果在滑动时，摩擦小到可以忽略，那么我們說，物体表面**絕对光滑**。反之，如果物体表面的性質使物体只能滚动，不能滑动，而滚动摩擦可以忽略，那么我們說，物体表面“**絕对粗糙**”。

在这两种情况下，摩擦力都不明显地出現在有关物体运动的問題中，因此問題为純力学的。如果摩擦的具体性質对运动来說是非常重要的，則运动就不是純力学的过程（比較 § 25）。

物体的接触使它們的自由度，較之自由运动时的自由度来說要減少。直到現在，在研究这类問題时，我們都以引入和实际自由度数直接对应的坐标的办法来考虑这种情况。但在滚动时，这样选擇坐标可能是行不通的。

对物体滚动所加的条件是接触点的速度相等（例如在沿着一靜止表面滚动时，接触点的速度应等于零）。在一般情况下，这样的条件由下面形式的“**約束方程**”来表示：

$$\sum_i c_{\alpha i}\dot{q}_i = 0, \qquad (38,2)$$

其中 $c_{\alpha i}$ 仅仅是坐标的函数（指标 α 用以給約束方程編号）。如果等式左边不是坐标的某函数对时間的全微商，則对这些方程无法积分。換句話說，它們不能化成仅是一些坐标之間的关系式，利用这些关系式使我們可用比較少的，与实际自由度数相应的坐标来描述物体的位置。这样的約束称**不完整約束**（与仅联系体系坐标的**完整約束**相反）。我們来研究，比如說，球在平面上的滚动。像平常一样，我們用 $\boldsymbol{V}$ 表示移动的速度（球心的速度），用 $\boldsymbol{\Omega}$ 表示轉动的角速度。如果在一般公式 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{V}+[\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{r}]$ 中讓 $\boldsymbol{r}=-a\boldsymbol{n}$（$a$ 是球半徑，$\boldsymbol{n}$ 是滚动平面在接触点法綫上的單位向量），就可以得到球

同平面的接触点的速度。我們所要求的約束是在接触点沒有滑动的条件，就是說由方程

$$\boldsymbol{V}-a[\boldsymbol{\Omega n}]=0 \tag{38,3}$$

給出的条件。它不可能积分出来，因为尽管速度 $\boldsymbol{V}$ 是球心向徑对时間的全微商，但同时，在一般情况下角速度却不是任何坐标的全微商。因此約束(38,3)是不完整的①。

由于不完整約束的方程不能减少坐标的数目，所以当这些約束存在时，不免必須利用并非完全是独立的坐标。为了組成相应的拉格朗日方程，我們再回到最小作用量原理上去。

存在(38,2)类型的約束就对坐标变分的可能值加上了一定的限制。就是說，用 δt 乘这些方程，我們可以求得，δq_i 不是独立的，而是由关系式

$$\sum_i c_{\alpha i}\delta q_i=0 \tag{38,4}$$

联系着的。在变分作用量时，应該考虑到这个情况。根据寻找条件極值的拉格朗日一般方法，应当給作用量变分

$$\delta S=\int\sum_i\delta q_i\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)dt$$

的被积函数加上乘了未定乘子 λ_α（坐标的函数）的方程(38,4)，然后再使积分等于零。这时可以認为所有变分 δq_i 是独立的，于是我們得到方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=\sum_\alpha\lambda_\alpha c_{\alpha i}。 \tag{38,5}$$

这些方程和約束方程(38,2)一起組成未知量 q_i 和 λ_α 的完全方程系。

在上述方法中，反作用力沒有出現，物体的接触完全由約束方

① 应該指出，这种約束对圓柱滚动可能是完整的。在这种情况下，当滚动的时候，轉动轴在空間方向保持不变，因此 $\Omega=\frac{d\varphi}{dt}$ 是圓柱繞自己軸的轉角 φ 的全微商。这时关系式(38,3)可积分，并給出慣性中心的坐标和角 φ 之間的关系。

程概括了。然而，也有另一种組成接触物体运动方程的方法，在这种方法中明显地引进了反作用力。这一方法（它构成达兰貝尔原理的內容）实質是，对每个接触体可写出方程

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}=\sum\boldsymbol{f},\quad \frac{d\boldsymbol{M}}{dt}=\sum[\boldsymbol{r}\boldsymbol{f}], \tag{38,6}$$

同时在作用于物体上的力 $\boldsymbol{f}$ 中包含有反作用力，这些力預先是未知的，它們本身以及物体的运动都决定于方程的解。这方法对完整約束和不完整約束的情况都可同样应用。

習　題

1．試利用达兰貝尔原理求在平面上滾动的均匀球的运动方程，假設作用于球的外力为 $\boldsymbol{F}$，外力矩为 $\boldsymbol{K}$。

解：約束方程 (38,3) 已在正文中写出。引入作用在球和平面相切之点上的反作用力（用 $\boldsymbol{R}$ 表示），我們写出方程(38,6)：

$$\mu\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{R}, \tag{1}$$

$$I\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}=\boldsymbol{K}-a[\boldsymbol{n}\boldsymbol{R}] \tag{2}$$

（这里用到了 $\boldsymbol{P}=\mu\boldsymbol{V}$，以及对球陀螺 $\boldsymbol{M}=I\boldsymbol{\Omega}$）。对时間微分約束方程，我們便得到：

$$\dot{\boldsymbol{V}}=a[\dot{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{n}]。$$

把它代入方程（1）并借助于（2）消去 $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$，便得到方程

$$\frac{I}{a\mu}(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{R})=[\boldsymbol{K}\boldsymbol{n}]-a\boldsymbol{R}+a\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\boldsymbol{R}),$$

这个方程把反作用力同 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 联系起来了。将这个方程写成分量形式，并用 $I=\frac{2}{5}\mu a^2$（見§32習題2,6）代入，則可得

$$R_x=\frac{5}{7a}K_y-\frac{2}{7}F_x,\quad R_y=-\frac{5}{7a}K_x-\frac{2}{7}F_y,\quad R_z=-F_z$$

（平面 xy 选在滾动面上）。最后，把这些式子代入（1）中，得到只含有已知的外力和力矩的运动方程

$$\frac{dV_x}{dt}=\frac{5}{7\mu}\left(F_x+\frac{K_y}{a}\right),$$

$$\frac{dV_y}{dt}=\frac{5}{7\mu}\left(F_y-\frac{K_x}{a}\right)。$$

借助于約束方程(38,3)，角速度的分量 Ω_x, Ω_y 可通过 V_x 和 V_y 表示出来，而对 Ω_z 我們有方程

$$\frac{2}{5}\mu a^2\frac{d\Omega_z}{dt}=K_z$$

[方程(2)的 Z 分量]。

2. 重量为 P 長度为 l 的均匀棒 BD，如圖 52 所示，靠在墻上，它的下端 B 用綫 AB 拉着。試求支点的反作用力和綫的張力。

圖 52.

解： 棒的重量引起作用于棒中点的豎直向下的力 P，力 R_B 和 R_C 分别是豎直向上和垂直于棒；綫的張力的方向由 B 到 A。平衡方程的解給出

$$R_C=\frac{Pl}{4h}\sin 2\alpha,\quad R_B=P-R_C\sin\alpha,\quad T=R_C\cos\alpha。$$

3. 有一棒 AB，其重为 P，两端分别靠在水平面和垂直面上(圖 53)，并被两条水平綫 AD 和 BC 拉着，綫 BC 和棒 AB 位于同一(豎直)平面內。試求支点的反作用力和綫的張力。

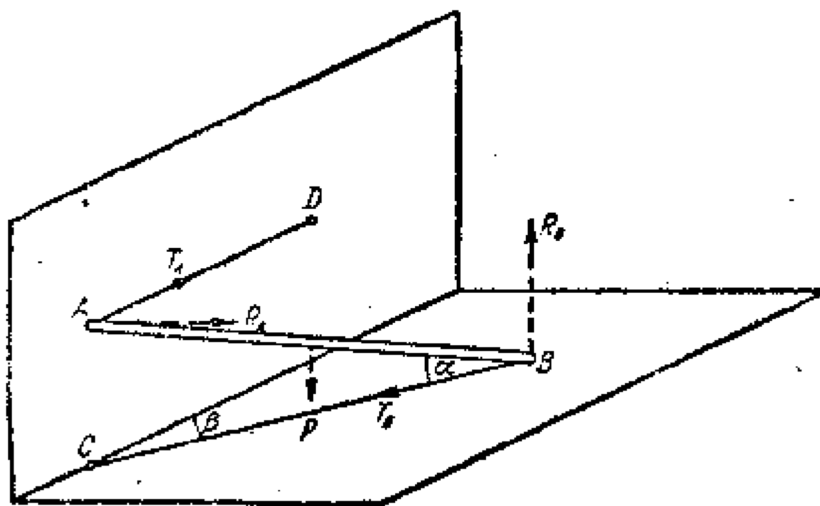


圖 53.

解： 綫的張力 T_A 和 T_B 沿着由 A 到 D 和由 B 到 C 的方向。反作用力

R_B 和 R_A 垂直于相应的平面。解平衡方程可得

$$R_B=P,\ T_B=\frac{P}{2}\operatorname{ctg}\alpha,\ R_A=T_B\sin\beta,\ T_A=T_B\cos\beta。$$

4．两根長为 l 的棒，上端以活动接头相連，下端用綫 AB 拉着(圖 54)。在一个棒的中点加力 F（棒的重量忽略不計)。試求反作用力。

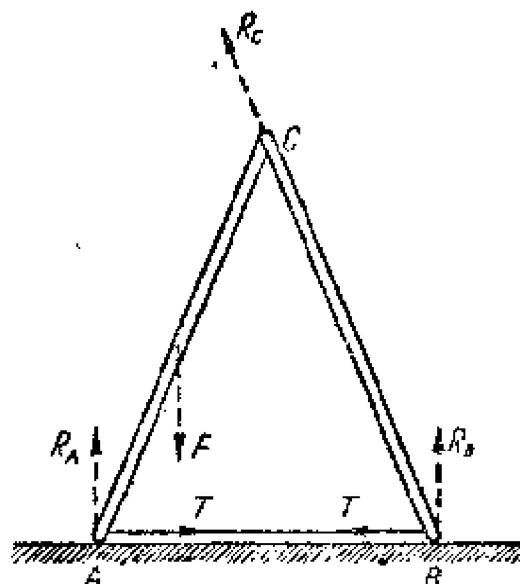


圖　54.

解：在 A 点綫的張力 T 由 A 指向 B，在 B 点则由 B 指向 A。反作用力 R_A 和 R_B 垂直于支持面。用 $\boldsymbol{R}_C$ 表示在活动接头上作用于棒 AC 的反作用力，这时作用于 BC 的反作用力是 $-\boldsymbol{R}_C$。作用于棒 BC 的力 $\boldsymbol{R}_B$，$\boldsymbol{T}$ 和 $-\boldsymbol{R}_C$ 的力矩和等于零的条件可导出 $\boldsymbol{R}_C$ 沿 BC 方向的結論。其余的平衡条件(对每一根棒)导出下列数值：

$$R_A=\frac{3}{4}F,\ R_B=\frac{F}{4},\ R_C=\frac{F}{4\sin\alpha},\ T=\frac{1}{4}F\operatorname{ctg}\alpha,$$

式中 α 是角 CAB。

§ 39．在非慣性計算系統中的运动

到現在为止，在研究任何力学体系的运动时，我們一直把运动認为屬于慣性計算系統。只有在慣性計算系統中，拉格朗日函数，比方說在外力場中一个質点的拉格朗日函数才有如下形式：

$$L_0=m\boldsymbol{v}_0^2/2-U,\tag{39,1}$$

相应地也才有运动方程

$$m\frac{d\boldsymbol{v}_0}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}$$

(在这一节中，我們将用指标 0 表示屬于慣性計算系統的量)。

現在，我們来研究一下，在非慣性系統中的質点运动方程将是怎样的。解决这一問題的出發点仍是最小作用量原理，它的应用范圍不受选擇計算系統的限制，同时，拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}=\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} \tag{39,2}$$

也照样有效。然而拉格朗日函数已不再具有(39, 1)的形式了，为了求得它，必須对函数 L_0 作适当的变换。

这一変換我們分两步进行。首先来看計算系統 K'，它相对慣性系統 K_0 以速度 $\boldsymbol{V}(t)$ 移动。粒子相对系統 K_0 和 K' 的速度 $\boldsymbol{v}_0$ 和 $\boldsymbol{v}'$ 由下列关系式相联系：

$$\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{V}(t)。\tag{39,3}$$

将此式代入(39,1)，可得到在系統 K' 中的拉格郎日函数

$$L'=\frac{m\boldsymbol{v}'^2}{2}+m\boldsymbol{v}'\boldsymbol{V}+\frac{m}{2}\boldsymbol{V}^2-U。$$

但 $V^2(t)$ 是已知的时間函数，可把它写成另外某一函数对 t 的全微商，因此，式中的第三項可以去掉。此外，$\boldsymbol{v}'=d\boldsymbol{r}'/dt$，其中 $\boldsymbol{r}'$ 是粒子在坐标系 K' 中的向徑，因此

$$m\boldsymbol{V}(t)\boldsymbol{v}'=m\boldsymbol{V}\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}=\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{V}\boldsymbol{r}')-m\boldsymbol{r}'\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}。$$

把此式代入拉格朗日函数中，再次去掉其中对时間的全微商，最后得到

$$L'=mv'^2/2-m\boldsymbol{W}(t)\boldsymbol{r}'-U, \tag{39,4}$$

其中 $\boldsymbol{W}=d\boldsymbol{V}/dt$ 是計算系統 K' 移动的加速度。

利用(39,4)建立拉格朗日方程，便得到

$$m\frac{d\boldsymbol{v}'}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}'}-m\boldsymbol{W}(t)。\tag{39,5}$$

我們看到，从对于粒子运动方程的影响的意义上来說，計算系統的加速运动与一个均勻力場的出現等价，并且这場中的作用力等于加速度和粒子質量的乘积，但方向則和加速度相反。

現在我們再引入一个新的計算系統 K。它和 K' 有共通的原点，但相对 K' 以角速度 $\boldsymbol{\Omega}(t)$ 轉动，因此相对慣性系統 K_0，系統 K 旣做平动，又做轉动。

粒子对系統 K' 的速度 $\boldsymbol{v}'$ 由它相对系統 K 的速度 $\boldsymbol{v}$ 和随同系統 K 一起轉动的速度 $[\boldsymbol{\Omega r}]$ 所組成，即

$$\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}+[\boldsymbol{\Omega r}]$$

（粒子在系統 K 和 K' 中的向徑 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 重合）。將此式代入(39,4)的拉格朗日函数中去可得到

$$L=mv^2/2+m\boldsymbol{v}[\boldsymbol{\Omega r}]+\frac{m}{2}[\boldsymbol{\Omega r}]^2-m\boldsymbol{Wr}-U。\qquad(39,6)$$

这是在任意非惯性計算系統中一般形式的拉格朗日函数。我們应当注意，計算系統的轉动使在拉格朗日函数中出現特别形式的項，它对粒子的速度来說是綫性的。

为了求得包含在拉格朗日方程中的微商，我們写出全微分

$$dL=m\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{v}+m\,d\boldsymbol{v}[\boldsymbol{\Omega r}]+m\boldsymbol{v}[\boldsymbol{\Omega}\,d\boldsymbol{r}]+m[\boldsymbol{\Omega r}][\boldsymbol{\Omega}\,d\boldsymbol{r}]-$$

$$-m\boldsymbol{W}\,d\boldsymbol{r}-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}\,d\boldsymbol{r}=m\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{v}+m\,d\boldsymbol{v}[\boldsymbol{\Omega r}]+m\,d\boldsymbol{r}[\boldsymbol{v\Omega}]+$$

$$+m[[\boldsymbol{\Omega r}]\boldsymbol{\Omega}]\,d\boldsymbol{r}-m\boldsymbol{W}\,d\boldsymbol{r}-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}\,d\boldsymbol{r}。$$

集合所有包含 $d\boldsymbol{v}$ 和 $d\boldsymbol{r}$ 的項，我們便求得

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}=m\boldsymbol{v}+m[\boldsymbol{\Omega r}],$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}}=m[\boldsymbol{v\Omega}]+m[[\boldsymbol{\Omega r}]\boldsymbol{\Omega}]-m\boldsymbol{W}-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}。$$

把这些式子代入(39,2)，我們便得到所要求的运动方程

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}-m\boldsymbol{W}+m[\boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{\Omega}}]+2m[\boldsymbol{v\Omega}]+m[\boldsymbol{\Omega}[\boldsymbol{r\Omega}]]。\qquad(39,7)$$

我們看到，因計算系統的轉动而产生的“惯性力”由三部份組成。力 $m[\boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{\Omega}}]$ 和轉动不等速有关，而另外两个力在等速轉动时也存在。力 $2m[\boldsymbol{v\Omega}]$ 叫科里奥利力，和过去我們研究过的一切（非消耗性的）力不同，它依賴于質点的速度。力 $m[\boldsymbol{\Omega}[\boldsymbol{r\Omega}]]$ 叫离心力。它位于通过 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}$ 的平面上，垂直于轉軸（也就是 $\boldsymbol{\Omega}$ 方向）并向

着离开軸的方向，离心力的数值等于 $m\rho\Omega^2$，其中 ρ 是粒子到轉軸的距离。

我們特别来研究一下作等速轉动并且沒有平动加速度的坐标系。在(39,6)中和(39,7)中，令 $\boldsymbol{\Omega}=$ 常数，$\boldsymbol{W}=0$，我們便得到拉格朗日函数

$$L=\frac{mv^2}{2}+m\boldsymbol{v}[\boldsymbol{\Omega r}]+\frac{m}{2}[\boldsymbol{\Omega r}]^2-U \qquad (39,8)$$

和运动方程

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}+2m[\boldsymbol{v\Omega}]+m[\boldsymbol{\Omega}[\boldsymbol{r\Omega}]]。 \qquad (39,9)$$

我們可同样求出在这情况下粒子的能量。将

$$\boldsymbol{p}=\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}=m\boldsymbol{v}+m[\boldsymbol{\Omega r}] \qquad (39,10)$$

代入 $E=\boldsymbol{pv}-L$，便得到

$$E=\frac{mv^2}{2}-\frac{m}{2}[\boldsymbol{\Omega r}]^2+U。 \qquad (39,11)$$

应当注意，在能量中沒有按速度为綫性的項。計算系統轉动的影响归結为給能量增加一仅依賴于粒子的坐标并正比于角速度平方的項。这个补充的位能 $-\frac{m}{2}[\boldsymbol{\Omega r}]^2$ 称为**离心能**。

質点相对等速轉动計算系統的速度 $\boldsymbol{v}$ 与它相对于慣性系統 K_0 的速度 $\boldsymbol{v}_0$ 由下式联系：

$$\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{v}+[\boldsymbol{\Omega r}]。 \qquad (39,12)$$

因此粒子在系統 K 中的冲量 $\boldsymbol{p}$ (39,10)和它在系統 K_0 中的冲量 $\boldsymbol{p}_0=m\boldsymbol{v}_0$ 相重合；同时，冲量矩 $\boldsymbol{M}_0=[\boldsymbol{rp}_0]$ 和 $\boldsymbol{M}=[\boldsymbol{rp}]$ 也相重合。而粒子在系統 K 和 K_0 中的能量则不同。将(39, 12)中之 $\boldsymbol{v}$ 代入(39,11)可得到

$$E=\frac{mv_0^2}{2}-m\boldsymbol{v}_0[\boldsymbol{\Omega r}]+U=\frac{mv_0^2}{2}+U-m[\boldsymbol{rv}_0]\boldsymbol{\Omega}。$$

前两項是在系統 K_0 中的能量 E_0。在最后一項中引入冲量矩，我

們便得到

$$E=E_0-M\Omega_{\circ} \tag{39,13}$$

这一公式确定在轉換到等速轉动坐标系时，能量的变換規律。虽然我們对一个質点推出了它，但很明显，这一推导可直接推广到任何粒子体系的情况中去，并且将导出同样的公式(39,13)。

習 題

1. 試求自由落体因地球旋轉(角速度很小)而产生的对竪直綫的偏移。

解： 在重力場中 $U=-m\boldsymbol{gr}$，其中 $\boldsymbol{g}$ 是重力加速度向量，方程式(39,9)中省略含有 Ω 平方的离心力，得到下面形式运动方程：

$$\dot{\boldsymbol{v}}=2[\boldsymbol{v\Omega}]+\boldsymbol{g}。 \tag{1}$$

我們来用逐步逼近法解这方程。为此我們假定 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$，其中 $\boldsymbol{v}_1$ 是方程 $\dot{\boldsymbol{v}}_1=\boldsymbol{g}$ 的解，即 $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{g}t+\boldsymbol{v}_0$ ($\boldsymbol{v}_0$ 是初速度)。把 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$ 代入(1)，仅把 $\boldsymbol{v}_1$ 留在右边，便得到 $\boldsymbol{v}_2$ 的方程

$$\dot{\boldsymbol{v}}_2=2[\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{\Omega}]=2t[\boldsymbol{g\Omega}]+2[\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{\Omega}]。$$

积分可得

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{h}+\boldsymbol{v}_0t+\frac{\boldsymbol{g}t^2}{2}+\frac{t^3}{3}[\boldsymbol{g\Omega}]+t^2[\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{\Omega}], \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{h}$ 是粒子初始位置的向量。

选擇軸 z 竪直向上，而軸 x 沿經綫向極点，这时

$$g_x=g_y=0,\ g_z=-g,\ \Omega_x=\Omega\cos\lambda,\ \Omega_y=0,\ \Omega_z=\Omega\sin\lambda,$$

其中 λ 是緯度(为了确定起見，我們假定它是北緯)。在(2)中，令 $\boldsymbol{v}_0=0$ 便找到

$$x=0,\ y=-\frac{t^3}{3}g\Omega\cos\lambda。$$

把降落时間 $t\approx\sqrt{\frac{2h}{g}}$ 代入此式，最后找到

$$x=0,\ y=-\frac{1}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}g\Omega\cos\lambda$$

(y 的負值相应于向东偏移)。

2. 試求从地面以初速 $\boldsymbol{v}_0$ 拋出的物体对平面的偏移。

解： 我們选擇平面 xz 使得速度 $\boldsymbol{v}_0$ 在此面内。起初的高度 $h=0$。对于

向侧边的偏移，我們从(2)(習題1)中得到

$$y=-\frac{t^3}{3}g\Omega_x+t^2(\Omega_x v_{0z}-\Omega_z v_{0x}),$$

或者代入飞行时間 $t\approx\frac{2v_{0z}}{g}$：

$$y=\frac{4v_{0z}^2}{g^2}\left(\frac{1}{3}v_{0z}\Omega_x-v_{0x}\Omega_z\right)。$$

3. 試确定地球轉动对摆的微振动的影响(即所謂的傅科摆)。

解：省略为二級小量的摆的竪直位移，可以認为物体的运动是在水平面 xy 内进行的。去掉含 Ω^2 的項，把运动方程写成

$$\ddot{x}+\omega^2x=2\Omega_z\dot{y},\quad \ddot{y}+\omega^2y=-2\Omega_z\dot{x},$$

其中 ω 是在不考虑地球轉动时摆的振动頻率。用 i 乘第二个方程，并与第一个方程相加，我們得到一个复数 $\xi=x+iy$ 的方程

$$\ddot{\xi}+2i\Omega_z\dot{\xi}+\omega^2\xi=0。$$

当 $\Omega_z\ll\omega$ 时，这方程式的解为

$$\xi=e^{-i\Omega_z t}(A_1e^{i\omega t}+A_2e^{-i\omega t})$$

或

$$x+iy=e^{-i\Omega_z t}(x_0+iy_0),$$

其中的函数 $x_0(t)$ 和 $y_0(t)$ 在不考虑地球轉动时給出摆的軌道。因此，地球轉动的影响归結为軌道繞竪直綫以角速度 Ω_z 的轉动。

第七章　正則方程

§ 40. 哈密頓方程

为了应用拉格朗日函数(和由它导出的拉格朗日方程)来确定力学的規律，首先必須用給定体系的广义坐标和广义速度的方法来描繪系統的力学状态。然而，这样的描繪并不是唯一可能的。应用体系的广义坐标和广义冲量来描繪，具有一系列优点，特别是在研究各种力学普遍問題的时候更是如此。因此就产生了如何找出与上述力学方法相适应的运动方程的問題。

用在数学上有名的所謂勒讓得尔变换，可使一組独立变量，轉换为另一組。在現在这种情况下，此种变换可概括如下。

拉格朗日函数是坐标和速度的函数，它的全微分等于

$$dL=\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i+\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i。$$

这个式子可写成

$$dL=\sum \dot{p}_i dq_i+\sum p_i d\dot{q}_i, \qquad (40,1)$$

因为根据定义，微商 $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ 就是广义冲量，而由于拉格朗日方程，$\frac{\partial L}{\partial q_i}=\dot{p}_i$。

現在把(40,1)中的第二項写成

$$\sum p_i d\dot{q}_i=d(\sum p_i\dot{q}_i)-\sum \dot{q}_i dp_i,$$

把全微分 $d(\sum p_i\dot{q}_i)$ 移到等式的左边，并改变所有的符号，則从(40,1)中可得

$$d(\sum p_i\dot{q}_i-L)=-\sum \dot{p}_i dq_i+\sum \dot{q}_i dp_i。$$

微分符号下的量乃是体系的能量(見§6),当它通过坐标和冲量来表达时,叫做体系的哈密頓函数

$$H(p, q, t) = \sum_i p_i\dot{q}_i - L。\tag{40,2}$$

从坐标和冲量在其中是独立变量的微分等式

$$dH = -\sum \dot{p}_i dq_i + \sum \dot{q}_i dp_i,\tag{40,3}$$

我們得出方程

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}。\tag{40,4}$$

这就是要求的以 p 和 q 为变量的运动方程,它們被称为**哈密頓方程**。它們組成 $2s$ 个未知函数 $p(t)$ 和 $q(t)$ 的 $2s$ 个一級微分方程的方程組,代替 s 个由拉格朗日方法所得到的二級方程。由于它們形式上的簡單和对称,这些方程也叫做**正則方程**。

哈密頓函数对时間的全微商是

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i。$$

如果把方程(40,4)中的 $\dot{q}_i$ 和 $\dot{p}_i$ 代入这里的話,那最后两項互相抵消,于是

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}。\tag{40,5}$$

特别是当哈密頓函数不明显地与时間有关时,那末 $dH/dt=0$,也就是說,我們又再次得到了能量守恒定律。

除了动力学的变量 $q, \dot{q}$ 或 q, p 外,拉格朗日函数和哈密頓函数还包含各种参量,这些参量是描述体系本身的特性或者作用在体系統上之外場的特性的。假定 λ 是这些参量中的任一个,把它看成变量,則代替(40,1),我們便有

$$dL = \sum \dot{p}_i dq_i + \sum p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda,$$

而代替(40,3)我們可得

$$dH = -\sum \dot{p}_i dq_i + \sum \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda。$$

从这里，我們得到联系拉格朗日函数和哈密頓函数对于 λ 的偏微商的关系式

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_{p,q}=-\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_{\dot{q},q},\tag{40,6}$$

在偏微商旁的指数是指，当在对 H 微分时，p 和 q 是不变的，而在对 L 微分时，$\dot{q}$ 和 q 是不变的。

这个結果可表成另外一种样子。假定拉格朗日函数具有 $L=L_0+L'$ 的形式，其中 L' 是基本函数 L_0 的微小补充量，那末，对应的在哈密頓函数 $H=H_0+H'$ 中的补充量 H' 同 L' 之間的关系为

$$(H')_{pq}=-(L')_{\dot{q}q}。\tag{40,7}$$

应当注意，在从(40, 1)到(40, 3)的变换中，并沒有写出带 dt 的項，即考虑到可能有的拉格朗日函数对时間的明显依賴关系的項，因为此項在这种情况下，仅仅起着和所作变换无关的参量的作用。像公式(40,6)一样，L 和 H 对时間的偏微商之間，也由下列关系式联系：

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{p,q}=-\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{\dot{q},q}。\tag{40,8}$$

習　題

1．試求在笛卡尔坐标、圓柱坐标和球坐标中，一个質点的哈密頓函数。

答：在笛卡尔坐标 x, y, z 中：

$$H=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+U(x, y, z)。$$

在圓柱坐标 r, φ, z 中：

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\varphi^2}{r^2}+p_z^2\right)+U(r, \varphi, z)。$$

在球坐标 r, θ, φ 中：

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)+U(r, \theta, \varphi)。$$

2．試求粒子在等速轉动的計算系統中的哈密頓函数。

解：根据(39, 10)，在能量(39, 11)中通过冲量 p 来表达速度 v，我們便得到

$$H=\frac{p^2}{2m}-\Omega[rp]+U。$$

§41. 拉烏斯函数

在某些情况下，当变换到新的变量时，比較合适的不是把所有的广义速度都变为冲量，而是只变换其中的一部分。与此相应的变换，完全和前一节所作的相似。

为了書写公式簡單起見，我們首先假定，总共只有两个广义坐标，用 q 和 ξ 表示它們，并进行从变量 $q, \xi, \dot{q}, \dot{\xi}$ 到变量 $q, \xi, p, \dot{\xi}$ 的变换，其中 p 是对应于坐标 q 的广义冲量。

拉格朗日函数 $L(q, \xi, \dot{q}, \dot{\xi})$ 的微分等于

$$dL=\frac{\partial L}{\partial q}dq+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}d\dot{q}+\frac{\partial L}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}d\dot{\xi}=$$

$$=\dot{p}dq+pd\dot{q}+\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}d\dot{\xi}+\frac{\partial L}{\partial \xi}d\xi,$$

由此得到

$$d(L-p\dot{q})=\dot{p}\,dq-\dot{q}\,dp+\frac{\partial L}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}d\dot{\xi}。$$

引入一函数(所謂拉烏斯函数)

$$R(q, p, \xi, \dot{\xi})=p\dot{q}-L, \tag{41,1}$$

其中的速度 $\dot{q}$ 应利用等式 $p=\partial L/\partial \dot{q}$ 通过冲量 p 来表示，微分

$$dR=-\dot{p}\,dq+\dot{q}\,dp-\frac{\partial L}{\partial \xi}d\xi-\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}d\dot{\xi}。 \tag{41,2}$$

由此可得，

$$\dot{q}=\frac{\partial R}{\partial p},\quad \dot{p}=-\frac{\partial R}{\partial q}, \tag{41,3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi}=-\frac{\partial R}{\partial \xi},\quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}=-\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}}。 \tag{41,4}$$

把后面两个等式代入坐标 ξ 的拉格朗日方程，我們便得到

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}}=\frac{\partial R}{\partial \xi}。\tag{41,5}$$

由此可見，拉烏斯函数对坐标 q 而言是哈密頓函数[方程(41,3)]，对坐标 ξ 而言是拉格朗日函数[方程(41,5)]。

根据一般的定义，体系的能量

$$E=\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}+\dot{\xi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}-L=p\dot{q}+\dot{\xi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}-L。$$

把(41,1)和(41,4)代入上式，就可得到能量用拉烏斯函数表示的式子：

$$E=R-\dot{\xi}\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}}。\tag{41,6}$$

这个公式显然可以推广到有几个坐标 q 和 ξ 的情况中去。

拉烏斯函数很适用，特别是在存在循环坐标的时候。如果 q 是循环坐标，那末它們不明显地包含在拉格朗日函数中，因而也不包含在拉烏斯函数中，所以拉烏斯函数只是 $p,\xi,\dot{\xi}$ 的函数。然而，与循环坐标 q 相对应的冲量 p 是常量[这也可从(41,3)第二个方程中得出，从这种意义上来講，方程(41,3)不給出任何新的东西]。把冲量 p 換成它們的給定常数值后，方程(41,5)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R(p,\xi,\dot{\xi})}{\partial \dot{\xi}}=\frac{\partial R(p,\xi,\dot{\xi})}{\partial \xi}$$

变成了只含坐标 ξ 的方程，因此循环坐标就完全被消去了。如果这些方程可以解出，并且 $\xi(t)$ 可以求得的話，那末把它們代入方程

$$\dot{q}=\frac{\partial R(p,\xi,\dot{\xi})}{\partial p}$$

的右端，我們就可直接积分而求出 $q(t)$。

習　題

消去循环坐标 ψ (ψ, φ, θ 是欧勒角)，求在外場 $U(\varphi,\theta)$ 中对称陀螺的拉烏斯函数。

解：拉格朗日函数

$$L=\frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+\frac{I_3'}{2}(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)^2-U(\varphi,\theta)$$

(見 § 35 習題 1)。拉烏斯函数

$$R=p_\psi\dot{\psi}-L=\frac{p_\psi^2}{2I_3'}-p_\psi\dot{\varphi}\cos\theta-\frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+U(\varphi,\theta),$$

此式中的第一項是可以去掉的常数。

§ 42. 泊松括号

$f(p,q,t)$ 是一坐标、冲量和时間的函数。写出它对时間的全微商

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_k\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial f}{\partial p_k}\dot{p}_k\right),$$

从哈密頓方程(40,4)中把 $\dot{p}_k$ 和 $\dot{q}_k$ 的表示式代入此式則得

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\{Hf\},\tag{42,1}$$

这里我們采用了符号

$$\{Hf\}=\sum_k\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial q_k}-\frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)。\tag{42,2}$$

式(42,2)叫做 H 和 f 的泊**松括号**。

我們知道,当体系运动时,动力学变量的不發生变化的函数叫做运动积分。从(42,1)看出,要量 f 是运动积分的条件$\left(\frac{df}{dt}=0\right)$可以写成

$$\frac{\partial f}{dt}+\{Hf\}=0。\tag{42,3}$$

如果运动积分不明显地依賴于时間,那末

$$\{Hf\}=0,\tag{42,4}$$

即它和哈密頓函数一起的泊松括号应等于零。

与(42,2)类似,任何一对量 f 和 g 的泊松括号被定义为

$$\{fg\}=\sum_k\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\cdot\frac{\partial g}{\partial q_k}-\frac{\partial f}{\partial q_k}\cdot\frac{\partial g}{\partial p_k}\right)。\tag{42,5}$$

泊松括号具有下列性質，并且这些性質都容易由定义导出。

把两个函数对調，那末泊松括号变号，如果其中有一个函数是常量(c)，那末泊松括号等于零，即

$$\{fg\} = -\{gf\}, \tag{42,6}$$

$$\{fc\} = 0。 \tag{42,7}$$

其次还有

$$\{f_1+f_2,\ g\} = \{f_1 g\} + \{f_2 g\}, \tag{42,8}$$

$$\{f_1 f_2,\ g\} = f_1\{f_2 g\} + f_2\{f_1 g\}。 \tag{42,9}$$

取(42,5)对时間的偏微商可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\{fg\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t}g\right\} + \left\{f\frac{\partial g}{\partial t}\right\}。 \tag{42,10}$$

如果其中有一个函数 f 或 g 是坐标或冲量，那末泊松括号簡化为偏微商：

$$\{fq_k\} = \frac{\partial f}{\partial p_k}, \tag{42,11}$$

$$\{fp_k\} = -\frac{\partial f}{\partial q_k}, \tag{42,12}$$

公式(42,11)可以，比方說，在(42,5)中令 $g = q_k$ 来得到，这时整个和縮減为一項，原因是 $\partial q_k/\partial q_l = \delta_{kl}$，而 $\partial q_k/\partial p_l = 0$。在(42,11)和(42,12)中讓 f 等于 q_i 和 p_i 我們可得

$$\{q_i q_k\} = 0,\ \{p_i p_k\} = 0,\ \{p_i q_k\} = \delta_{ik}。 \tag{42,13}$$

在三个函数所組成的泊松括号間，有下列关系式存在：

$$\{f\{gh\}\} + \{g\{hf\}\} + \{h\{fg\}\} = 0, \tag{42,14}$$

它叫做雅可比恒等式

为了証明它，我們来注意下面的情况。根据定义(42,5)，泊松括号 $\{fg\}$ 是变量 f 和 g 的一級微商的双綫性齐次函数。因此，比方說，$\{h\{fg\}\}$ 則是变量 f 和 g 的二級微商的綫性齐次函数。而等式(42,14)的整个左边部分是三个函数 f，g 和 h 的二級微商的

綫性齐次函数。我們来集合包含 f 的二級微商的各項。第一个括号內沒有这类項，它里面只有 f 的一級微商。按下列公式引入綫性微分算符 D_1 和 D_2:

$$D_1(\varphi)=\{g\varphi\},\quad D_2(\varphi)=\{h\varphi\},$$

我們把第二个括号和第三个括号写成象征的形式，那末

$$\{g\{hf\}\}+\{h\{fg\}\}=\{g\{hf\}\}-\{h\{gf\}\}=$$
$$=D_1(D_2(f))-D_2(D_1(f))=(D_1D_2-D_2D_1)f。$$

很容易看出，这样的綫性微分算符的組合，不可能含有 f 的二級微商。事实上，綫性微分算符的一般形式是

$$D_1=\sum_k \xi_k\frac{\partial}{\partial x_k},\quad D_2=\sum_k \eta_k\frac{\partial}{\partial x_k},$$

式中 ξ_k 和 η_k 是变量 $x_1, x_2, \cdots$ 的任意函数，那末

$$D_1D_2=\sum_{k,l}\xi_k\eta_l\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_l}+\sum_{k,l}\xi_k\frac{\partial\eta_l}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_l},$$
$$D_2D_1=\sum_{k,l}\eta_k\xi_l\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_l}+\sum_{k,l}\eta_k\frac{\partial\xi_l}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_l},$$

而它們的差

$$D_1D_2-D_2D_1=\sum_{k,l}\left(\xi_k\frac{\partial\eta_l}{\partial x_k}-\eta_k\frac{\partial\xi_l}{\partial x_k}\right)\frac{\partial}{\partial x_l}$$

也是算符，但只包含一級微分。由此可見，在等式(42,14)的左边，所有含 f 二級微商的項都相互消去了，既然，同样的情況也适用于函数 g 和 h，因此所有表达式也都恒等于零。

泊松括号的重要性質在于：如果 f 和 g 是两个运动积分，那末由它們所組成的泊松括号也是运动积分，即

$$\{fg\}=常数 \qquad (42,15)$$

(这就是所謂泊松定理)。

如果 f 和 g 不明显依賴于时間，則这个定理的証明十分簡單。在雅可比恒等式中令 $h=H$ 可得

$$\{H\{fg\}\}+\{f\{gH\}\}+\{g\{Hf\}\}=0。$$

由此可見，如果 $\{Hg\}=0$ 并且 $\{Hf\}=0$，則必有 $\{H\{fg\}\}=0$，这也就是需要証明的。

如果运动积分明显地依賴于时間，那末基于(42,1)我們写出

$$\frac{d}{dt}\{fg\}=\frac{\partial}{\partial t}\{fg\}+\{H\{fg\}\}。$$

应用公式(42,10)，再利用雅可比恒等式把括号 $\{H\{fg\}\}$ 换成另外两个括号，則得

$$\frac{d}{dt}\{fg\}=\left\{\frac{\partial f}{\partial t}g\right\}+\left\{f\frac{\partial g}{\partial t}\right\}-\{f\{gH\}\}-\{g\{Hf\}\}=$$

$$=\left\{\frac{\partial f}{\partial t}+\{Hf\},g\right\}+\left\{f,\frac{\partial g}{\partial t}+\{Hg\}\right\}$$

或者

$$\frac{d}{dt}\{fg\}=\left\{\frac{df}{dt}g\right\}+\left\{f\frac{dg}{dt}\right\}, \tag{42,16}$$

在一般情况下的泊松定理的証明由此已很明显了。

自然，应用泊松定理，我們并不是一定得到新的运动积分，因为运动积分的数目总是有限的($2s-1$ 个，其中 s 是自由度数)。在某些情况下，我們可能得到毫无意义的結果——泊松括号化为常数。而在另外一些情况下，新得的运动积分，可能只是原来运动积分 f 和 g 的函数。如果說既不發生前一种情况，也不發生后一种情况，那末泊松括号給出新的运动积分。

習　題

1．試求由質点的冲量 $\boldsymbol{p}$ 和冲量矩 $\boldsymbol{M}=[\boldsymbol{rp}]$ 的笛卡尔分量所組成的泊松括号。

解： 应用公式(42,12)可得到

$$\{M_xp_y\}=-\frac{\partial M_x}{\partial y}=-\frac{\partial}{\partial y}(yp_z-zp_y)=-p_z,$$

同样还可得到两个公式

$$\{M_xp_x\}=0,\quad \{M_xp_z\}=p_y。$$

其他括号,可用循环替換指标 x, y, z 的方法求得。

2. 試求由矩 $\boldsymbol{M}$ 的分量所組成的泊松括号。

解: 直接根据公式(42,5)計算可得

$$\{M_xM_y\}=-M_z,\ \{M_yM_z\}=-M_x,\ \{M_zM_x\}=-M_y。$$

既然不同粒子的冲量和坐标是相互独立的变量,那末,显然,習題1和習題2中所求得的公式,对于任何粒子体系的总冲量和总冲量矩也都是正确的。

3. 試証明

$$\{\varphi M_z\}=0,$$

其中 φ 是坐标和冲量的任意无向函数。

解: 无向函数只能以 r^2, p^2, rp 的組合形式依賴于向量 r 和 p 的分量,因此

$$\frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{r}}=\frac{\partial\varphi}{\partial(r^2)}2\boldsymbol{r}+\frac{\partial\varphi}{\partial(\boldsymbol{pr})}\boldsymbol{p},$$

对 $\partial\varphi/\partial p$ 而言亦是如此。考虑到上面指出的微分法則,所要求的关系式可通过根据公式(42,5)的直接运算来檢驗。

4. 試証明

$$\{\boldsymbol{f}M_z\}=[\boldsymbol{n}\boldsymbol{f}],$$

其中 $\boldsymbol{f}$ 是粒子的坐标和冲量的向量函数,而 $\boldsymbol{n}$ 是軸 z 方向的單位向量。

解: 任意向量 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$ 可写成 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{r}\varphi_1+\boldsymbol{p}\varphi_2+[\boldsymbol{rp}]\varphi_3$ 的形式,式中 φ_1, φ_2, φ_3 是无向函数。应用公式(42,9), (42,11), (42,12)和習題3中所証明的公式,可以通过直接运算来檢驗所要求的关系式。

§43. 作为坐标函数的作用量

在定出最小作用量原理时,我們研究过积分

$$S=\int_{t_1}^{t_2} Ldt, \tag{43,1}$$

这里是沿給定位置 $q^{(1)}$ 和 $q^{(2)}$ 間的軌道进行积分,而 $q^{(1)}$ 和 $q^{(2)}$ 是体系在給定时刻 t_1 和 t_2 的位置。在变分作用量时,比較了沿着具有同样 $q(t_1)$ 和 $q(t_2)$ 值的邻近軌道的这一积分之值。这些軌道中只有一条对应着真实的运动,这就是积分 S 最小时的軌道。

我們再从另外一个角度来看作用量这一概念。就是把 S 看成描繪沿眞实軌道之运动的特性的量，并比較它在具有相同起点 $q(t_1)=q^{(1)}$，但是在时刻 t_2 通过不同位置的那些軌道上的値。換句話說，我們把对眞实軌道的作用量积分看成积分上限的坐标值的函数。

在从一个軌道轉到另外一个和它邻近的軌道时，作用量的变化（在一个自由度的情况下）由式(2,5)，即

$$\delta S=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\Big|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q\,dt$$

給出。既然眞实运动的軌道滿足拉格朗日方程，那末这里的积分就将等于零。在第一項中，假定在下限 $\delta q(t_1)=0$，而 $\delta q(t_2)$ 簡單地表示为 δq。同样把 $\partial L/\partial \dot{q}$ 換成 p 后，我們最后得到 $\delta S=p\delta q$，或者在任意多个自由度的一般情况下

$$\delta S=\sum_i p_i\delta q_i。\tag{43,2}$$

从这关系式可得出結論：作用量对坐标的偏微商等于相应的冲量，即

$$\frac{\partial S}{\partial q_i}=p_i。\tag{43,3}$$

当我們研究在給定时刻 t_1 从給定的位置 $q^{(1)}$ 开始，但是在不同的时刻 $t_2=t$ 結束于給定位置 $q^{(2)}$ 的那些軌道时，同样可以把作用量理解为时間的显函数。应用适当的积分的变分法，可以求出在这种意义上来理解的偏微商 $\partial S/\partial t$。然而用下列方法处理，应用我們已知的公式(43,3)更为簡單。

根据作用量本身的定义，在軌道上它对于时間的全微商等于

$$\frac{dS}{dt}=L。\tag{43,4}$$

另一方面，在上述意义上把 S 看成坐标和时間的函数时，利用公式(43,3)，我們便有

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\partial S}{\partial t}+\sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i=\frac{\partial S}{\partial t}+\sum_i p_i\dot{q}_i。$$

比較两式可求得

$$\frac{\partial S}{\partial t}=L-\sum_i p_i\dot{q}_i,$$

最后可求得

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-H。\qquad(43,5)$$

公式(43,3)和(43,5)可一起写成下式:

$$dS=\sum_i p_i\,dq_i-H\,dt,\qquad(43,6)$$

这是作用量作为在(43,1)中积分上限的坐标和时間的函数之全微分表示式。現在假定,不只是改变运动終点的坐标(和时間),同时也改变运动的起点。显然,与此相适应的 S 的变化,将由表达式(43,6)在两头的差給出,即

$$dS=\sum_i p_i^{(2)}\,dq_i^{(2)}-H^{(2)}\,dt^{(2)}-\sum_i p_i^{(1)}\,dq_i^{(1)}+H^{(1)}\,dt^{(1)}。\qquad(43,7)$$

这关系式本身业已表明:在运动时,无論外界对体系的作用怎么样,它的末状态都不能是起始状态的任意函数,只有等式(43,7)右边部分是全微分的那些运动才是可能的。因此,和拉格朗日函数的具体形式无关的最小作用量原理存在的事实本身,也給可能的运动加上了一定的限制。例如,对于从空間一定点,向外面飞出的粒子束,有可能建立一系列普遍的規律(不依外場的形式为轉移)。研究这些規律是所謂**几何光学**的对象。

值得指出,如果把坐标和冲量看作独立变分的量,并根据(43,6)把最小作用量的条件写成下列积分形式:

$$S=\int\left(\sum_i p_i\,dq_i-H\,dt\right),\qquad(43,8)$$

那末哈密頓方程可在形式上由它导出。为了簡單起見,再次假定只有一个坐标(和一个冲量),写作用量的变分为

$$\delta S=\int\left\{\delta p\,dq+p\,d\,\delta q-\frac{\partial H}{\partial q}\delta q\,dt-\frac{\partial H}{\partial p}\delta p\,dt\right\}。$$

变换第二项(分部积分)给出

$$\delta S=\int\delta p\left(dq-\frac{\partial H}{\partial p}dt\right)+p\,\delta q\Big|-\int\delta q\left(dp+\frac{\partial H}{\partial q}dt\right).$$

在积分限上，我們应設 $\delta q=0$，因而积出的項就去掉了。因为 δp 和 δq 是任意的、独立的，剩下的表达式等于零只有在每个积分內的被积式都等于零的条件下才有可能，因而

$$dq=\frac{\partial H}{\partial p}dt,\quad dp=-\frac{\partial H}{\partial q}dt,$$

用 dt 除后，我們便得到哈密頓方程。

§44. 莫培督原理

力学体系的运动可以由最小作用量原理完全确定，解从这一原理所得出的运动方程，既可求得軌道的形式，又可求得在軌道上位置对于时間的依賴关系。

如果限制在只确定軌道本身的問題上(問題的时間部分放在一旁)，那末为了这一目的，可以建立最小作用量原理的簡化形式。

假定拉格朗日函数，而同時还有哈密頓函数不明显地包含时間，因此体系的能量守恒：

$$H(p,\ q)=E=\text{常数}。$$

在最小作用量原理中，我們将不比較体系(在它的两个給定位置間)的所有虛运动，而只比較那些满足能量守恒定律，具有能量 E 的运动。积分对这样变分的極小性，虽不是作用量最小的充分条件，但是是必要条件。

把作用量写成(43,8)的形式，并把其中的函数 $H(p,\ q)$ 改成常量 E，则可以得到

$$S=\int\sum_i p_i\,dq_i-E(t-t_0)\tag{44,1}$$

（我們用 t_0 表示运动的起始时刻，而运动末时刻簡單地表为 t）。此式中的第一項

$$S_0=\int\sum_i p_i\,dq_i \tag{44,2}$$

有时叫做縮短了的作用量。

显然，在能量为常数时，对作用量的变分，就是对縮短了的作用量的变分。为了利用这样的变分原理，必須預先通过坐标 q 和它的微分 dq，來表示冲量及(44.2)中的所有被积式。为此必須应用定义冲量的式子

$$p_i=\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}L\left(q,\frac{dq}{dt}\right) \tag{44,3}$$

及能量守恒定律的方程

$$E\left(q,\frac{dq}{dt}\right)=E。 \tag{44,4}$$

从此方程出發，通过坐标 q 和它們的微分 dq 来表达微分 dt，并代入公式(44,3)，那末我們便通过 q 和 dq 来表示冲量了，而且能量 E 将起參量作用。这样得到的变分原理，决定体系的軌道；这原理通常叫做**莫培督原理**（虽然它精确的定义是由拉格朗日和欧勒給出的）。

拉格朗日函数一般的形式(5,5)是动能和位能的差：

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i,k}a_{ik}(q)\dot{q}_i\dot{q}_k-U(q),$$

我們在明显的形式下来对它作上述处理。这时冲量

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}=\sum_k a_{ik}(q)\dot{q}_k,$$

而能量
$$E=\frac{1}{2}\sum_{i,k}a_{ik}(q)\dot{q}_i\dot{q}_k+U(q)。$$

由于后一等式我們有

$$dt=\sqrt{\frac{\sum a_{ik}dq_idq_k}{2(E-U)}}, \tag{44,5}$$

把此式代入

$$\sum_i p_i\, dq_i = \sum_{i,k} a_{ik} \frac{dq_k}{dt}\, dq_i,$$

便得到下面形式的縮短了的作用量：

$$S_0 = \int \sqrt{2(E-U)\sum_{i,k} a_{ik}\, dq_i\, dq_k}\,。 \tag{44,6}$$

例如，一个質点的动能

$$T = \frac{m}{2}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2$$

（其中 m 是粒子質量，dl 是軌道弧元），因而确定軌道形状的变分原理是

$$\delta \int \sqrt{2m(E-U)}\, dl = 0, \tag{44,7}$$

这里是在空間两給定点間取积分。这种形式的原理是雅可比提出的。

在質点自由运动的情况下，$U=0$，(44,7) 給出意义不大的結果

$$\delta \int dl = 0,$$

即質点沿最短途徑——直綫而运动。

我們再轉到作用量的表达式(44,1)上，这次我們对参量 E 来变分它。作用量的这个变分等于零的条件給出

$$\frac{\partial S_0}{\partial E}\,\delta E - (t-t_0)\,\delta E = 0$$

或

$$\frac{\partial S_0}{\partial E} = t - t_0\,。 \tag{44,8}$$

对(44,6)形式的縮短了的作用量，这个等式化成关系式

$$\int \sqrt{\frac{\sum a_{ik}\, dq_i\, dq_k}{2(E-U)}} = t - t_0, \tag{44,9}$$

这关系式不是别的，就是方程(44,5)的积分。它和軌道方程一起，

就可完全确定运动。

習 題

从变分原理(44,7)出發求軌道的微分方程。

解： 进行变分，我們就有

$$\delta\int\sqrt{E-U}\,dl=-\int\left\{\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}\frac{\delta \boldsymbol{r}}{2\sqrt{E-U}}dl-\sqrt{E-U}\frac{d\boldsymbol{r}}{dl}d\,\delta\boldsymbol{r}\right\}.$$

在第二項中考慮到 $dl^2=d\boldsymbol{r}^2$，因此 $dl\,d\delta l=d\boldsymbol{r}\,d\delta\boldsymbol{r}$，在这項中进行分部积分，然后讓被积式子中的 $\delta\boldsymbol{r}$ 的系数等于零，我們便得到軌道的微分方程

$$2\sqrt{E-U}\frac{d}{dl}\left(\sqrt{E-U}\frac{d\boldsymbol{r}}{dl}\right)=-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}。$$

算出等式左边的微商，再引入 $\boldsymbol{F}=-\partial U/\partial \boldsymbol{r}$，可把微分方程写成

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dl^2}=\frac{\boldsymbol{F}-(\boldsymbol{F}\boldsymbol{t})\boldsymbol{t}}{2(E-U)},$$

式中 $\boldsymbol{t}=d\boldsymbol{r}/dl$ 是軌道切綫的單位向量。差 $\boldsymbol{F}-(\boldsymbol{F}\boldsymbol{t})\boldsymbol{t}$ 是力在軌道法向上的分量 $\boldsymbol{F}_n$。从微分几何知道，$d^2\boldsymbol{r}/dl^2=d\boldsymbol{t}/dl$ 等于 $\boldsymbol{n}/R$，式中 R 是軌道的曲率半徑，而 $\boldsymbol{n}$ 是軌道主法綫上的單位向量。用 $mv^2/2$ 代換 $E-U$，我們得到

$$\boldsymbol{n}\frac{mv^2}{R}=\boldsymbol{F}_n,$$

这和已經知道的曲綫运动的法向加速度公式相符合。

§45. 正則变換

广义坐标 q 的选擇不受任何条件的限制，它們可以是任何單値确定体系在空間的位置的 s 个量。拉格朗日方程的外形与这样的选擇无关，因而在这种意义上可以說，对于从坐标 $q_1, q_2, \cdots$ 到任何另外独立量 $Q_1, Q_2, \cdots$ 的变換而言，拉格朗日方程不变，新坐标 Q 是旧坐标 q 的函数，并且这种选擇也是許可的，当作这种选擇时，它們之間的关系还显含时間，即所說的是变換

$$Q_i=Q_i(q,t) \qquad (45,1)$$

（有时，把它們叫做**点变換**）。

除拉格朗日方程外，在进行变換(45,1)时，很显然还有哈密頓

方程(40, 4)也保持自已的形式。然而，哈密頓方程在实际上允許更多种类的变换。这自然是因为在哈密頓方法中，冲量 p 像坐标 q 一样，也起独立变量的作用。因此变换这一概念可以扩大到包括 $2s$ 个独立变量 p 和 q 到新的变量 P 和 Q，依下面公式的变换：

$$Q_i = Q_i(p, q, t), \quad P_i = P_i(p, q, t)。 \tag{45, 2}$$

許可变换种类的此种扩大是力学的哈密頓方法根本的优点之一。

然而絕不是說，在进行任意形如(45, 2)的变换时，运动方程保持自己的正則形式。現在我們来求变换要滿足怎样的条件，才能使在新变量 P, Q 时运动方程具有下列形式：

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}, \tag{45, 3}$$

式中 H' 是一新的哈密頓函数 $H'(P, Q)$。能作到这点的变换叫做**正則变换**。

可用下面的步驟来求得正則变换公式。在 § 43 末尾我們曾經指出，哈密頓方程可从下面形式的最小作用量原理求得：

$$\delta \int \left(\sum_i p_i\, dq_i - H\, dt \right) = 0 \tag{45, 4}$$

(并且独立变分所有的坐标和冲量)。

为了使新变量 P 和 Q 也滿足哈密頓方程，最小作用量原理

$$\delta \int \left(\sum_i P_i\, dQ_i - H'\, dt \right) = 0 \tag{45, 5}$$

对它們也应当成立。当(45, 4)和(45, 5)中的被积式子仅相差一个坐标、冲量和时間的任意函数 F 的全微分时，(45, 4)和(45, 5)这两个最小作用量原理才等效，这时两个积分之差将是在变分时不起作用的常量(F 在两积分限上的差)。由此可見，应該有

$$\sum p_i\, dq_i - H\, dt = \sum P_i\, dQ_i - H'\, dt + dF。$$

任何正則变换，都由自己的所謂变换的**导引函数** F 来表征。把上

列关系式写成

$$dF=\sum p_i dq_i-\sum P_i dQ_i+(H'-H)dt, \qquad (45,6)$$

我們可以看出，

$$p_i=\frac{\partial F}{\partial q_i}, \ P_i=-\frac{\partial F}{\partial Q_i}, \ H'=H+\frac{\partial F}{\partial t}, \qquad (45,7)$$

这时假定导引函数 F 是已知的新旧坐标（和时間）的函数：$F=$ $=F(q, Q, t)$。在函数 F 已經給出的情况下，公式(45, 7)建立起旧变量(p, q)和新变量 (P, Q) 之間的关系，同时还給出新哈密頓函数的表达式。

不通过变量 q 和 Q 表达导引函数，而通过旧坐标 q 和新冲量 P 来表达导引函数可能会方便些。在这种情况下，为了要推出正則变換公式，应該在关系式 (45, 6) 中进行适当的勒讓得尔变換。就是說，把它改写成

$$d(F+\sum P_iQ_i)=\sum p_i dq_i+\sum Q_i dP_i+(H'-H)dt。$$

等式左边微分符号下的式子当通过 q 和 P 表达时，就是新的导引函数。用 $\Phi(q, P, t)$ 表示它，我們就有[①]

$$P_i=\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}, \ Q_i=\frac{\partial \Phi}{\partial P_i}, \ H'=H+\frac{\partial \Phi}{\partial t}。 \qquad (45,8)$$

用类似的方法可得該导引函数仅依賴于变量 p 和 Q，或者仅依賴于 p 和 P 的正則变換公式。

应該指出，新旧哈密頓函数之間的关系，永远可用同一种方式表达，卽差 $H'-H$ 由导引函数对时間的偏微商給出。特别是，如果导引函数不依賴于时間，那末 $H'=H$。換句話說，要在这种情

① 应当指出，取形狀为

$$\Phi=\sum_i f_i(q, t)P_i$$

的导引函数后（式中 f_i 是任意函数），我們将得到使新坐标 $Q_i=f_i(q, t)$ 的变換，也卽是使新坐标只用旧坐标（但不用冲量）来表达的变換。这些都是点变换，它們自然是正則变換的特殊形式。

况下得到新的哈密頓函数，只須把在 H 中的量 p，q 用新变量 P，Q 来表达就够了。

正則变换的广泛，在很大程度上已使哈密頓方法中广义坐标和广义冲量概念丧失其原始意思。既然变换(45,2)使得 P，Q 中的每一个量既同坐标 q，又同冲量 p 联系了起来，那末变量 Q 就已經沒有純粹空間坐标的意义了。两組变量[⊖] 之間的差別，基本上只是名称的不同了。这种情形非常明显地表現在，比方說，$Q_i=p_i$，$P_i=-q_i$[①] 的变换中，这一变换显然不改变方程的正則形式，而仅仅使坐标和冲量互换而已。

由于名称是假定的，在哈密頓方法中的变量 p 和 q 常常簡称为正則共轭量。

正則共轭的条件，可用泊松括号来表示。为此，我們来証明关于泊松括号相对正則变换的不变性的普通定理。

設 $\{fg\}_{p,q}$ 是 f 和 g 的泊松括号，并且在其中是对变量 p 和 q 进行微分，而 $\{fg\}_{P,Q}$ 是对正則变量 P 和 Q 来微分的泊松括号。那末

$$\{fg\}_{p,q}=\{fg\}_{P,Q}。\tag{45,9}$$

应用正則变换公式进行直接运算，可以証实这一关系式的正确性。但也可以不进行运算而只用下面的討論来証实。

首先可以看出，在正則变换(45,7)或(45,8)中，时間起着参量的作用。因此如果我們能証明定理(45,9)对不直接依賴于时間的量是正确的話，那末它在一般情况下，也是正确的。現在我們純粹形式地把量 g 看成某一假想体系的哈密頓函数。根据公式(42,1)，这时 $\{fg\}_{p,q}=df/dt$。但微商 df/dt 只可能与(我們假想体系的)运动性質有关，而与变量的选择无关。因此，从一組变量变换到另

⊖ 这里是指广义冲量和广义坐标两組变量——譯者注。

① 应当指出，此变换相应于导引函数 $F=\sum q_iQ_i$。

一組变量时，泊松括号也不可能改变。

由公式(42,13)和定理(45,9)可得

$$\{Q_iQ_k\}_{p,q}=0,\ \{P_iP_k\}_{p,q}=0,\ \{P_iQ_k\}_{p,q}=\delta_{ik}。\quad (45,10)$$

这就是应用泊松括号所写出的，为了使变换 $p, q\to P, Q$ 为正則变换新变量所必須满足的条件。

值得指出，就是在运动中，量 p, q 的改变也可看作正則变换。这一看法的意思如下。讓 p_t, q_t 是正則变量在时刻 t 的值，而 $p_{t+\tau}$，$q_{t+\tau}$ 是它們在另一时刻 $t+\tau$ 的值。后者乃是前者(以及作为参量的間隔 τ 的大小)的某种函数：

$$q_{t+\tau}=q(q_t, p_t, \tau),\ p_{t+\tau}=p(q_t, p_t, \tau)。$$

如果把这些公式看成从变量 q_t, p_t 到变量 $q_{t+\tau}, p_{t+\tau}$ 的变换，那末这将是正則变换。事实上，量 $q_{t+\tau}, p_{t+\tau}$ 像变量 q_t, p_t 一样满足正則方程，它們之間的差别，仅仅在于时間計算起点不同。

§46. 刘維定理

为了使力学現象能得到几何上的解釋，常常应用所謂相空間这一概念，相空間就是 $2s$ 維空間，体系的 s 个广义坐标值和 s 个广义冲量值安放在它的坐标軸上。空間的每一点都对应着力学体系的确定状态。当体系运动时，表示它的相点在相空間中画出一道綫来，这綫叫做相軌迹。

微分的乘积

$$d\Gamma=dq_1dq_2\cdots dq_s dp_1\cdots dp_s$$

可看作相空間的"体积元"。現在我們来研究积分 $\int d\Gamma$，这是对相空間某一区域的积分，它表示該区域的体积。我們来証明，这一数量有相对正則变换的不变性的性質，即如果进行从变量 p, q 到 P, Q 的正則变换，那末 p, q 空間和 P, Q 空間的对应区域体积

相同：

$$\int\cdots\int dq_1\cdots dq_s\,dp_1\cdots dp_s=\int\cdots\int dQ_1\cdots dQ_s\,dP_1\cdots dP_s。\quad (46,1)$$

大家都知道，在重积分中的变量的变换按下面公式进行：

$$\int\cdots\int dQ_1\cdots dQ_s\,dP_1\cdots dP_s=\int\cdots\int D\,dq_1\cdots dq_s\,dp_1\cdots dp_s,$$

式中

$$D=\frac{\partial(Q_1\cdots Q_s,\ P_1\cdots P_s)}{\partial(q_1\cdots q_s,\ p_1\cdots p_s)}\quad (46,2)$$

是所謂变换的雅可比式。因此，証明定理 (46,1) 归結为証明正則变换的雅可比式等于1，即

$$D=1。\quad (46,3)$$

我們来应用已知的雅可比式的一个性質，即在某种意义上，可把雅可比式看成分式的这种性質。用 $\partial(q_1\cdots q_s,\ P_1\cdots P_s)$ "除分子和分母"，我們便得到

$$D=\frac{\partial(Q_1\cdots Q_s,\ P_1\cdots P_s)}{\partial(q_1\cdots q_s,\ P_1\cdots P_s)}\Big/\frac{\partial(q_1\cdots q_s,\ p_1\cdots p_s)}{\partial(q_1\cdots q_s,\ P_1\cdots P_s)}。$$

根据雅可比式的另一个大家知道的规則，即如果在雅可比式的"分子"和"分母"中出現同样的量时，雅可比式可化成变量較少的雅可比式，并且在进行一切微分时，其中相同的被除去的量应看作常量。因此

$$D=\left\{\frac{\partial(Q_1,\ \cdots,\ Q_s)}{\partial(q_1,\ \cdots,\ q_s)}\right\}_{P=常数}\Big/\left\{\frac{\partial(p_1,\ \cdots,\ p_s)}{\partial(P_1,\ \cdots,\ P_s)}\right\}_{q=常数}。\quad (46,4)$$

我們来研究一下此式分子中的雅可比式。按定义，这是一个由元素 $\partial Q_i/\partial q_k$（第 i 行和第 k 列的元素）所組成的 s 阶行列式。借助于(45,8)形式下的导引函数 $\Phi(q,\ P)$ 来作一个正則变换，我們得到

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial q_k\,\partial P_i}。$$

以同样的方式可求得式 (46, 4) 分母的行列式的 i,k 元素等于

$\partial^2\Phi/\partial q_i\partial P_k$。这就是說，两个行列式的差别，仅仅在于把行换成列和把列换成行。因此它們相等，于是关系式(46,4)等于1，这就是所要的証明。

現在讓我們想像相空間中一小区域，其中每一点都在按所研究力学体系的运动方程随时移动。这样一来，整个区域也都将移动。但这时它的体积是不变的：

$$\int d\Gamma = 常数。 \tag{46,5}$$

这一断言（即所謂刘維定理）可直接从相体积在正則变换时的不变性，以及在运动中 p，q 的改变也可看作正則变换（上节末尾已指出）这一点得出。

用完全类似的方法可証明积分

$$\iint \sum_i dq_i\, dp_i,$$

$$\iiiint \sum_{i\neq k} dq_i\, dp_i\, dq_k\, dp_k,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

的不变性，其中积分是沿着相空間中的二維，四維，…… 的簇来进行的。

§ 47. 哈密頓-雅可比方程

在§43中曾引入了坐标和时間的函数的作用量的概念。我們也指出过，这一函数 $S(q, t)$ 对时間的偏微商和哈密頓函数間有关系式

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q, p, t) = 0,$$

而它对坐标的偏微商等于冲量。把哈密頓函数中的冲量 p 依此换成微商 $\partial S/\partial q$，我們便得到方程

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q_1, \cdots, q_s;\ \frac{\partial S}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial S}{\partial q_s};\ t\right)=0, \quad (47,1)$$

函数 $S(q, t)$ 应满足这一方程。这是一級偏微分方程，它叫做**哈密頓-雅可比方程**。

除拉格朗日方程和正則方程外，哈密頓-雅可比方程也是积分运动方程的一个普遍方法的基础。

在講述这一方法之前，我們首先提示一点，就是任何一級偏微分方程都有一个依賴于一个任意函数的解，这个解叫做方程的**普遍积分**。然而，在力学的应用中，起主要作用的并不是哈密頓-雅可比方程的普遍积分，而是它的完全积分，这个积分是偏微分方程的解，它含有的任意常量的数目，和方程中独立变量的数目相同。

在哈密頓-雅可比方程中，时間和坐标是独立变量。因此对 s 个自由度的体系而言，这方程的完全积分应含有 $s+1$ 个任意常数。在这种情况下，由于函数 S 仅仅以自己的微商存在于方程中，因此完全积分的任意常数里，有一个常数应該以相加的方式出現，也就是説，哈密頓-雅可比方程的完全积分具有下列形式：

$$S=f(t, q_1, \cdots, q_s; \alpha_1, \cdots, \alpha_s)+A, \quad (47,2)$$

其中 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 和 A 是任意常数[①]。

① 虽然哈密頓-雅可比方程的普遍积分对我們来説并不必要，但我們指出，如果已知完全积分的話，就能够求出它。为此我們認为量 A 是其他常数的任意函数：

$$S=f(t, q_1, \cdots, q_s;\ \alpha_1, \cdots, \alpha_s)+A(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)。$$

根据 s 个条件

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}=0,$$

用坐标和时間的函数来代替 α_i，我們得到的依賴于任意函数 $A(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$ 的形式的普遍积分。事实上，对由此得到的函数 S，我們有

$$\frac{\partial S}{\partial q_i}=\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)_\alpha+\sum_k\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_k}\right)_q\frac{\partial \alpha_k}{\partial q_i}=\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)_\alpha。$$

而 $(\partial S/\partial q_i)_\alpha$ 滿足哈密頓-雅可比方程，因为根据假定，$S(t, q; \alpha)$ 是这方程的完全积分。所以微商 $\partial S/\partial q_i$ 也滿足哈密頓-雅可比方程。

現在我們来考査哈密頓-雅可比方程的完全积分和我們感兴趣的运动方程的解之間的关系。为此，我們进行由量 q, p 到新变量的正則变换，并选 $f(t, q, \alpha)$ 作为导引函数，而选量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 作为新冲量。新坐标我們用 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 表示。由于导引函数依賴于旧坐标和新冲量，因此我們应該应用公式(45,8)：

$$p_i=\frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad \beta_i=\frac{\partial f}{\partial \alpha_i}, \quad H'=H+\frac{\partial f}{\partial t}。$$

旣然函数 f 满足哈密頓-雅可比方程，那末我們可以看出，新哈密頓函数恒等于零：

$$H'=H+\frac{\partial f}{\partial t}=H+\frac{\partial S}{\partial t}=0。$$

所以新变量的正則方程有 $\dot{\alpha}_i=0$, $\dot{\beta}_i=0$ 的形式，由此可得

$$\alpha_i=常数, \quad \beta_i=常数。\tag{47,3}$$

另一方面 s 个方程

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_i}=\beta_i$$

又給用时間和 $2s$ 个常量 α 及 β 来表示 s 个坐标提供了可能。因此我們便求得运动方程的普遍积分。

由此可見，应用哈密頓-雅可比方法来解决力学体系运动的問題，归結为如下的运算。

根据哈密頓函数写出哈密頓-雅可比方程，求得此方程的完全积分(47,2)。对任意常数 α 微分它，并使之等于新的常数 β，这样就得到 s 个代表方程的方程組

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}=\beta_i, \tag{47,4}$$

解这方程組，我們就得到作为时間和 $2s$ 个任意常数的函数的坐标 q。然后冲量对时間的依賴关系可由方程 $p_i=\partial S/\partial q_i$ 求得。

如果我們有哈密頓-雅可比方程的不完全积分，它所依賴的任意常数少于 s 个，那末虽然我們不能用它来得到运动方程的普遍

积分，但是可使求一般积分的問題簡化。譬如說，如果已知含有一个任意常数 α 的函数 S，那末关系式

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha}=\text{常数}$$

給出一个联系 $q_1, \cdots, q_s$ 和 t 的方程。

如果函数 H 不明显地依赖于时間，也就是說体系是保守的，那末哈密頓-雅可比方程将取更簡單一些的形式。这时，作用量对于时間的依賴关系归結为加上 $-Et$，即

$$S=S_0(q)-Et \tag{47,5}$$

（見 § 44），代入(47,1)，我們得到对于縮短了的作用量 $S_0(q)$ 的哈密頓-雅可比方程

$$H\left(q_1, \cdots, q_s; \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial S_0}{\partial q_s}\right)=E。 \tag{47,6}$$

§ 48. 分离变量

在一系列重要的情况下，哈密頓-雅可比方程的完全积分，可用**分离变量**的方法求得，这一方法的实質如下。

假定說，在哈密頓-雅可比方程里，某一坐标（我們用 q_1 表示它）及与之相应的微商 $\partial S/\partial q_1$，仅以某种組合 $\varphi\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right)$ 的形式出現，而这种組合中并不包含其他坐标（或时間）和微商，也就是說，方程具有下列形式：

$$\Phi\left\{q_i, t, \frac{\partial S}{\partial q_i}, \frac{\partial S}{\partial t}, \varphi\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right)\right\}=0, \tag{48,1}$$

其中用 q_i 表示除 q_1 外其余所有坐标的集合。

在这种情况下，我們将寻求下面形式的解：

$$S=S'(q_i, t)+S_1(q_1)。 \tag{48,2}$$

把此式代入方程(48,1)便得到

$$\Phi\left\{q_i, t, \frac{\partial S'}{\partial q_i}, \frac{\partial S'}{\partial t}, \varphi\left(q_1, \frac{dS_1}{dq_1}\right)\right\}=0。\tag{48,3}$$

假定說解(48, 2)已找到了。那末把它代入方程(48, 3)后，方程(48,3)就应变成恒等式，而这一恒等式在 q_1 为任何値时都是正确的。但是当 q_1 变化时，只有函数 φ 可能变化，因此等式(48,3)的恒等性要求函数 φ 本身是常数。于是，方程(48,3)就分成了两个方程：

$$\varphi\left(q_1, \frac{dS_1}{dq_1}\right)=\alpha_1,\tag{48,4}$$

$$\Phi\left\{q_i, t, \frac{\partial S'}{\partial q_i}, \frac{\partial S'}{\partial t}, \alpha_1\right\}=0,\tag{48,5}$$

其中 α_1 是任意常数。上面第一个是常微分方程，函数 $S_1(q_1)$ 可由它經过簡單的积分求出。此后还剩下偏微分方程(48, 5)，但其中独立变量的数目已經少了。

如果能用这种方法分离所有 s 个坐标和时間，那末求哈密頓-雅可比方程的完全积分就全部化为求积了。对保守体系而言，实际上只要在方程(47,6)中分离 s 个自变量(坐标)，在完全分离的情况下，所要求的方程的积分具有下列形式：

$$S=\sum_k S_k(q_k; \alpha_1, \cdots, \alpha_s)-E(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)t,\tag{48,6}$$

其中，每个函数 S_k 只依赖于一个坐标，能量 E 则是任意常数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 的函数，把 $S_0=\sum S_k$ 代入方程(47,6)，就可求得它。

循环变量的情况是分离变量的特殊情况。循环坐标 q_1 不显含在哈密頓函数中，因而也就不显含在哈密頓-雅可比方程中。这时函数 $\varphi\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right)$变为 $\partial S/\partial q_1$，而由方程(48, 4)很容易得出 $S_1=\alpha_1 q_1$，于是

$$S=S'(q_i, t)+\alpha_1 q_1。\tag{48,7}$$

这时常数 α_1 不是别的，而正是对应于循环坐标的冲量 $p_1=\partial S/\partial q_1$ 的常数値。应当注意，对保守系統而言，把时間分离成 $-Et$ 的形

式是对"循环变量" t 的分离变量的方法。

由此可見，在哈密頓-雅可比方程中分离变量，包括了以前我們研究过的以应用循环变量为基础的各种簡化运动方程的情况。現在还可增添一系列的情况：即使坐标不是循环的，分离变量也仍然可能。这一切都表明，哈密頓-雅可比的方法是求一般运动方程普遍积分最有力的方法。

为了在哈密頓-雅可比方程中分离变量，适当地选擇坐标具有决定性的意义。我們来研究在各种坐标中分离变量的几个例子，由于它們和質点在各种不同外場中运动的問題有关，因此具有物理意义。

1. **球坐标**。在(r, θ, φ)坐标中，哈密頓函数

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)+U(r, \theta, \varphi),$$

如果

$$U=a(r)+\frac{b(\theta)}{r^2}+\frac{c(\varphi)}{r^2\sin^2\theta},$$

就可分离变量，式中 $a(r)$, $b(\theta)$, $c(\varphi)$ 是任意函数。此式最后一項未必有物理意义，因此我們只研究下面形式的場：

$$U=a(r)+\frac{b(\theta)}{r^2}。\tag{48,8}$$

在这种情况下，函数 S_0 的哈密頓-雅可比方程是

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_0}{\partial r}\right)^2+a(r)+\frac{1}{2mr^2}\left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial \theta}\right)^2+2mb(\theta)\right]+$$
$$+\frac{1}{2mr^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S_0}{\partial \varphi}\right)^2=E。$$

考虑到坐标 φ 是循环的，我們来寻求下面形式的解：

$$S_0=p_\varphi\varphi+S_1(r)+S_2(\theta),$$

对于函数 $S_1(r)$ 和 $S_2(\theta)$ 我們得到方程

$$\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2+2mb(\theta)+\frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}=\beta,$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 + a(r) + \frac{\beta}{2mr^2} = E。$$

积分这两个方程，最后可得

$$S = -Et + p_\varphi\varphi + \int\sqrt{\beta - 2mb(\theta) - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}}\,d\theta +$$

$$+\int\sqrt{2m[E - a(r)] - \frac{\beta}{r^2}}\,dr。\qquad (48,9)$$

p_φ, β, E 在这里是任意常数，对它們来微分上式，并使結果等于新的常数，我們可得到运动方程的普遍积分。

2. 抛物綫坐标。 从圓柱坐标（本节中我們用 ρ, φ, z 来表示它）到抛物綫坐标 ξ, η, φ 的过渡是依据公式

$$z = \frac{1}{2}(\xi - \eta),\quad \rho = \sqrt{\xi\eta}\qquad (48,10)$$

来进行的。坐标 ξ 和 η 可取从零到 ∞ 的一切值，容易証实 ξ 和 η 为常量的曲面是两族旋轉抛物面（z 軸是对称軸）。引入半徑

$$r = \sqrt{z^2 + \rho^2} = \frac{1}{2}(\xi + \eta),\qquad (48,11)$$

还可把关系式(48,10)表成另一种形式。这时

$$\xi = r + z,\quad \eta = r - z。\qquad (48,12)$$

我們来建立質点在坐标 ξ, η, φ 中的拉格朗日函数。对时間微分式(48,10)，并代入

$$L = \frac{m}{2}(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) - U(\rho, \varphi, z)$$

（圓柱坐标中的拉格朗日函数），我們便得到

$$L = \frac{m}{8}(\xi + \eta)\left(\frac{\dot\xi^2}{\xi} + \frac{\dot\eta^2}{\eta}\right) + \frac{m}{2}\xi\eta\dot\varphi^2 - U(\xi, \eta, \varphi)。\qquad (48.13)$$

冲量为

$$p_\xi = \frac{m}{4\xi}(\xi + \eta)\dot\xi,\quad p_\eta = \frac{m}{4\eta}(\xi + \eta)\dot\eta,\quad p_\varphi = m\xi\eta\dot\varphi,$$

而哈密頓函数

$$H=\frac{2}{m}\frac{\xi p_\xi^2+\eta p_\eta^2}{\xi+\eta}+\frac{p_\varphi^2}{2m\xi\eta}+U(\xi,\eta,\varphi)。\qquad(48.14)$$

在这种坐标中，物理上有意义的分离变量的情况相应于下列形式的位能：

$$U=\frac{a(\xi)+b(\eta)}{\xi+\eta}=\frac{a(r+z)+b(r-z)}{2r}。\qquad(48.15)$$

这时，我們有方程

$$\frac{2}{m(\xi+\eta)}\left[\xi\left(\frac{\partial S_0}{\partial\xi}\right)^2+\eta\left(\frac{\partial S_0}{\partial\eta}\right)^2\right]+\frac{1}{2m\xi\eta}\left(\frac{\partial S_0}{\partial\varphi}\right)^2+$$
$$+\frac{a(\xi)+b(\eta)}{\xi+\eta}=E,$$

循环坐标 φ 以 $p_\varphi\varphi$ 的形式分出，給方程乘以 $m(\xi+\eta)$，重新組合各项，便可得到

$$2\xi\left(\frac{\partial S_0}{\partial\xi}\right)^2+ma(\xi)-mE\xi+\frac{p_\varphi^2}{2\xi}+2\eta\left(\frac{\partial S_0}{\partial\eta}\right)^2+$$
$$+mb(\eta)-mE\eta+\frac{p_\varphi^2}{2\eta}=0。$$

假定
$$S_0=p_\varphi\varphi+S_1(\xi)+S_2(\eta),$$

则可得两个方程

$$2\xi\left(\frac{dS_1}{d\xi}\right)^2+ma(\xi)-mE\xi+\frac{p_\varphi^2}{2\xi}=\beta,$$
$$2\eta\left(\frac{dS_2}{d\eta}\right)^2+mb(\eta)-mE\eta+\frac{p_\varphi^2}{2\eta}=-\beta。$$

积分这两个方程，最后可得

$$S=-Et+p_\varphi\varphi+\int\sqrt{\frac{mE}{2}+\frac{\beta}{2\xi}-\frac{ma(\xi)}{2\xi}-\frac{p_\varphi^2}{4\xi^2}}\,d\xi+$$
$$+\int\sqrt{\frac{mE}{2}-\frac{\beta}{2\eta}-\frac{mb(\eta)}{2\eta}-\frac{p_\varphi^2}{4\eta^2}}\,d\eta,\qquad(48.16)$$

式中 p_φ, β, E 是任意常数。

3. 椭圓坐标。根据公式

$$\rho=\sigma\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)},\quad z=\sigma\xi\eta\qquad(48.17)$$

引入这种坐标 ξ, η, φ。常量 σ 是变换参量。坐标 ξ 的数值可从 1 变到 ∞，而坐标 η 則从 -1 到 $+1$。假定在 z 軸上 A_1 和 A_2 两点的坐标为 $z=\sigma$ 及 $z=-\sigma$①，如果引入到这两点的距离 r_1 和 r_2：

$$r_1=\sqrt{(z-\sigma)^2+\rho^2}, \quad r_2=\sqrt{(z+\sigma)^2+\rho^2},$$

則我們能够得到几何意义比較明显的关系式。把(48,17)代入此二式可得

$$r_1=\sigma(\xi-\eta), \quad r_2=\sigma(\xi+\eta),$$

$$\xi=\frac{r_2+r_1}{2\sigma}, \quad \eta=\frac{r_2-r_1}{2\sigma}。\qquad (48,18)$$

把拉格朗日函数从圓柱坐标变換到椭圓坐标中去，可求得

$$L=\frac{m\sigma^2}{2}(\xi^2-\eta^2)\left(\frac{\dot{\xi}^2}{\xi^2-1}+\frac{\dot{\eta}^2}{1-\eta^2}\right)+$$

$$+\frac{m\sigma^2}{2}(\xi^2-1)(1-\eta^2)\dot{\varphi}^2-U(\xi,\eta,\varphi)。\qquad (48,19)$$

由此得到哈密頓函数

$$H=\frac{1}{2m\sigma^2(\xi^2-\eta^2)}\Big[(\xi^2-1)p_\xi^2+(1-\eta^2)p_\eta^2+$$

$$+\left(\frac{1}{\xi^2-1}+\frac{1}{1-\eta^2}\right)p_\varphi^2\Big]+U(\xi,\eta,\varphi)。\qquad (48,20)$$

物理上有意义的分离变量的情况相应于位能

$$U=\frac{a(\xi)+b(\eta)}{\xi^2-\eta^2}=\frac{\sigma^2}{r_1r_2}\left\{a\left(\frac{r_2+r_1}{2\sigma}\right)+b\left(\frac{r_2-r_1}{2\sigma}\right)\right\}, \qquad (48,21)$$

式中 $a(\xi)$ 和 $b(\eta)$ 是任意函数。在哈密頓-雅可比方程中分离变量所得的結果是

$$S=-Et+p_\varphi\varphi+\int\sqrt{2m\sigma^2E+\frac{\beta-2m\sigma^2a(\xi)}{\xi^2-1}-\frac{p_\varphi^2}{(\xi^2-1)^2}}\,d\xi+$$

$$+\int\sqrt{2m\sigma^2E-\frac{\beta+2m\sigma^2b(\eta)}{1-\eta^2}-\frac{p_\varphi^2}{(1-\eta^2)^2}}\,d\eta。\qquad (48,22)$$

---

① 等 ξ 的曲面是以 A_1, A_2 为焦点的椭面族

$$z^2/\sigma^2\xi^2+\rho^2/\sigma^2(\xi^2-1)=1,$$

等 η 的曲面是有相同焦点的双曲面族

$$z^2/\sigma^2\eta^2-\rho^2/\sigma^2(1-\eta^2)=1。$$

習 題

1．試求粒子在場

$$U=\frac{\alpha}{r}-Fz$$

（庫侖場和均匀場的合成）中运动的哈密頓–雅可比方程的完全积分。

解：这个場屬于(48,15)的类型，并且

$$a(\xi)=\alpha-\frac{F}{2}\xi^2,\quad b(\eta)=\alpha+\frac{F}{2}\eta^2。$$

依据公式(48,16)可求得

$$S=-Et+p_\varphi\varphi+\int\sqrt{\frac{mE}{2}-\frac{m\alpha-\beta}{2\xi}-\frac{p_\varphi^2}{4\xi^2}+\frac{mF\xi}{4}}\,d\xi+$$

$$+\int\sqrt{\frac{mE}{2}-\frac{m\alpha+\beta}{2\eta}-\frac{p_\varphi^2}{4\eta^2}-\frac{mF\eta}{4}}\,d\eta,$$

式中 p_φ, E, β 是任意常数。常数 β 在現在的情况下有确定的意义，它反映

$$\beta=-m\left[\frac{\alpha z}{r}+\frac{p_\rho}{m}(zp_\rho-\rho p_z)\right]-\frac{m}{2}F\rho^2$$

这个量（粒子坐标和冲量的單值函数）的守恒。方括号里的式子是只有庫侖場存在时的运动积分（見§15）。

2．同上題，但場的位能

$$U=\frac{\alpha_1}{r_1}+\frac{\alpha_2}{r_2}$$

（两个相距 2σ 的静止中心的庫侖場）。

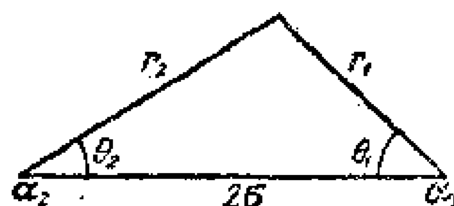


圖 55.

解：这个場屬于(48,21)的类型，并且

$$a(\xi)=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\sigma}\xi,\quad b(\eta)=\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\sigma}\eta。$$

根据公式(48,22)可求得

$$S=-Et+p_\varphi\varphi+\int\sqrt{2m\sigma^2E+\frac{\beta-2m\sigma(\alpha_1+\alpha_2)\xi}{\xi^2-1}-\frac{p_\varphi^2}{(\xi^2-1)^2}}\,d\xi+$$

$$+\int\sqrt{2m\sigma^2E-\frac{\beta+2m\sigma(\alpha_1-\alpha_2)\eta}{1-\eta^2}-\frac{p_\varphi^2}{(1-\eta^2)^2}}\,d\eta,$$

常数 β 在現在的情况下反映

$$\beta=\sigma^2p_\rho^2-M^2+2m\sigma(\alpha_1\cos\theta_1+\alpha_2\cos\theta_2)$$

这个量的守恒，式中 M 是粒子的总冲量矩，θ_1 和 θ_2 如圖 55 所示。

§49. 絕热不变量

我們来研究由某参量 λ 所描述的作一維有限运动的力学体系，参量 λ 决定体系本身或体系所处的外場的性質。

假定說，参量 λ 在某种外因影响下随时間緩慢地（通常說絕热地）变化，"緩慢"变化是指在体系运动周期 T 时間内，λ 变化很小的那种变化，即

$$T\frac{d\lambda}{dt}\ll\lambda。\tag{49.1}$$

这个体系不是封閉的，它的能量不守恒。但由于 λ 变化的緩慢，因而可以相信，能量变化的速度 $\dot{E}$ 是与参量变化的速度 $\dot{\lambda}$ 成比例的。这就意味着在 λ 变化时，能量 E 是参量 λ 的某种函数。換句話說，就是有 E 和 λ 的这种組合存在，它在体系运动的过程中保持不变。这种組合称为**絕热不变量**。

設 $H(p, q; \lambda)$ 是体系的哈密頓函数，它依賴于参量 λ。按公式(40,5)，体系能量对时間的全微商是

$$\frac{dE}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial\lambda}\frac{d\lambda}{dt},$$

我們来求此等式在运动周期内的平均，考慮到 λ 变化很慢（同时 $\dot{\lambda}$ 变化也很慢），$\dot{\lambda}$ 可移到平均的符号外面：

$$\overline{\frac{dE}{dt}}=\frac{d\lambda}{dt}\cdot\overline{\frac{\partial H}{\partial\lambda}},$$

而被平均函数 $\partial H/\partial\lambda$ 中只把 p 和 q 看作变量，λ 不看作变量。換句話說，平均是对体系在 λ 为給定常数值的条件下的运动来进行的。

把平均值写成明显的形式

$$\overline{\frac{dE}{dt}}=\frac{d\lambda}{dt}\frac{1}{T}\int_0^T\frac{\partial H}{\partial\lambda}dt。$$

根据哈密頓方程 $\dot{q}=\partial H/\partial p$ 我們有

$$dt=\frac{dq}{\dfrac{\partial H}{\partial p}}。$$

应用这一等式，我們把对时間的积分换为对坐标的积分，并把周期 T 写成

$$T=\int_0^T dt=\oint\frac{dq}{\dfrac{\partial H}{\partial p}},$$

符号 $\oint$ 是表示对坐标在一周期内的整个变化（"向前"和"向后"）的积分[1]。因此

$$\overline{\frac{dE}{dt}}=\frac{d\lambda}{dt}\frac{\oint\dfrac{\partial H/\partial\lambda}{\partial H/\partial p}dq}{\oint\dfrac{dq}{\partial H/\partial p}}。\tag{49,2}$$

已經指出过，这公式内的积分应該沿着 λ 为給定常数值的运动軌道进行。沿着这样的軌道，哈密頓函数保持不变的数値 E，而冲量則是坐标变量 q 和两个不变的独立参量 E 及 λ 的确定的函数。把冲量看成函数 $p(q;E,\lambda)$，对参量 λ 微分等式 $H(p,q;\lambda)=$ $=E$，我們便得到

$$\frac{\partial H}{\partial\lambda}+\frac{\partial H}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial\lambda}=0$$

或

$$\frac{\partial H/\partial\lambda}{\partial H/\partial p}=-\frac{\partial p}{\partial\lambda}。$$

把此式代入 (49,2) 上面的积分中，把下面积分中的被积函数写成 $\partial p/\partial E$，便有

$$\overline{\frac{dE}{dt}}=-\frac{d\lambda}{dt}\frac{\oint\dfrac{\partial p}{\partial\lambda}dq}{\oint\dfrac{\partial p}{\partial E}dq}\tag{49,3}$$

[1] 如果体系的运动是轉动，而某个轉角 φ 就是坐标 q，那末对 $d\varphi$ 的积分应該沿"整个一周"，即从零到 2π 来进行。

或
$$\oint\left(\frac{\partial p}{\partial E}\overline{\frac{\partial E}{\partial t}}+\frac{\partial p}{\partial\lambda}\frac{d\lambda}{dt}\right)dq=0。$$

这等式最后可改写成

$$\overline{\frac{dI}{dt}}=0, \tag{49,4}$$

式中 I 表示沿 E 和 λ 为给定之运动軌道的积分

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint p\,dq。 \tag{49,5}$$

这个結果表明，当參量 λ 改变时，在所討論的近似情况下 I 是常量，卽 I 是絕热不变量①。

量 I 乃是体系能量(和參量 λ) 的函数。我們指出，对能量的偏微商

$$2\pi\frac{\partial I}{\partial E}=\oint\frac{\partial p}{\partial E}dq$$

[卽(49,3)分母中的积分]是体系运动的周期:

$$2\pi\frac{\partial I}{\partial E}=T。 \tag{49,6}$$

如果应用体系相軌道的概念，則可以給这积分以明显的几何意义。在現在这种情况下(一个自由度)，相空間是二維坐标系 p, q，而作周期运动的体系的相軌道是这个平面上的封閉曲綫，沿着这条曲綫所取的积分(49,5)，是該曲綫所包圍着的面积。很明显，它可写成等效的曲綫积分

$$I=-\frac{1}{2\pi}\oint q\,dp,$$

或者对面积的二重积分

$$I=\frac{1}{2\pi}\int dp\,dq。$$

作为一个例子，我們来确定一維振子的絕热不变量。它的哈密頓函数

① 可以証明，I 和常数值的区別是一个指数性的小量[如果函数 $\lambda(t)$ 沒有奇点]。

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2q^2}{2},$$

式中 ω 是振子的固有频率。相軌道方程由能量守恒定律 $H(p,q)==E$ 給出。这是以 $\sqrt{2mE}$ 和 $\sqrt{2E/m\omega^2}$ 为半軸的橢圓，它的面积(除以 2π)

$$I=\frac{E}{\omega}。\tag{49,7}$$

此量的絕热不变性意味着，当振子的参量变化很緩慢时，能量和频率成正比。

借助于量 I，可以給出封閉体系（参量是不变的）运动方程新的定义。

选 I 作为新"冲量"，作变量 p，q 的正則变换。这时导引函数应該是表为 q 和 I 的函数的"縮短了的作用量" S_0。事实上，在体系能量給定的情况下，S_0 可以被确定。但在封閉体系中，I 只是能量的函数，因此 S_0 一定能表达成函数 $S_0(q, I)$ 的形式，偏微商 $\left(\frac{\partial S_0}{\partial q}\right)_E=p$ 和当 I 不变时的偏微商 $\left(\frac{\partial S_0}{\partial q}\right)_I$ 相等，因此

$$p=\frac{\partial S_0(q, I)}{\partial q},\tag{49,8}$$

这个等式与正則变换(45,8)的第一个公式相符合。第二个公式确定新"坐标"(我們用 w 来表示它)：

$$w=\frac{\partial S_0(q, I)}{\partial I}。\tag{49,9}$$

变量 I 和 w 称为**正則变量**，并且 I 称为**作用变量**，而 w 称为**角变量**。

既然导引函数 $S_0(q, I)$ 不明显地依賴于时間，那末新的哈密頓函数 H' 等于用新变量表达的旧哈密頓函数 H。換句話說，H' 是表为作用变量函数 $E(I)$ 的能量。正則变量的哈密頓方程分別为

$$\dot{I}=0,\quad \dot{w}=\frac{dE(I)}{dI}。\tag{49,10}$$

正如像应当有的一样，从第一个方程得到 I＝常数，于是除能量外，量 I 亦是常数，从第二个方程可看出，角变量是时間的綫性函数：

$$w=\frac{dE}{dI}t+常数。\tag{49.11}$$

作用量 $S_0(q,I)$ 是坐标的非單值函数。每經过一周期，这个函数并不返回到原来的数值，而得到增量

$$\Delta S_0=2\pi I,\tag{49,12}$$

这由公式 $S_0=\int p\,dq$ 及定义(49.5)可看出。在同样的时間内，角变量也因此获得增量

$$\Delta w=\Delta\frac{\partial S_0}{\partial I}=\frac{\partial}{\partial I}\Delta S_0=2\pi\tag{49,13}$$

[这可直接应用公式(49,11)及周期的表达式(49,6)来証实]。

相反的，如果我們用正則变量来表示 q 和 p [或它們的任何單值函数 $F(p,q)$]，那末在 w 改变 2π 时，这些函数将不改变自己的数值(在給定 I 的情况下)。换句話說，用正則变量来表达的任何一个單值函数 $F(p,q)$ 都是 w 的周期函数，而周期等于 2π。

§50. 多維运动的一般性質

我們現在来研究作有限运动(对所有的坐标来說)的多自由度体系。假定这时問題允許按哈密頓-雅可比方法完全分离变量。这就是說，通过适当的坐标选擇，縮短了的作用量将是

$$S_0=\sum_i S_i(q_i),\tag{50,1}$$

并且其中的每个函数都只依賴于一个坐标。

既然广义冲量是

$$p_i=\frac{\partial S_0}{\partial q_i}=\frac{dS_i}{dq_i},$$

那末函数 S_i 可写成

$$S_i=\int p_i\,dq_i。\tag{50,2}$$

这些函数是非單值的。由于运动的有限性，每个坐标都只可能在有限的区間内变化。当 q_i 在此区間中"向前"和"向后"变化时，作用量获得增量

$$\Delta S_0=\Delta S_i=2\pi I_i,\tag{50,3}$$

式中 I_i 是

$$I_i=\frac{1}{2\pi}\oint p_i\,dq_i,\tag{50,4}$$

这里是对給定的 q_i 的变化①积分。

像上节对一个自由度的情况所作的一样，我們現在来进行正則变换。"作用变量" I_i 和"角变量"

$$w_i=\frac{\partial S_0(q,I)}{\partial I_i}=\sum_k\frac{\partial S_k(q_k,I)}{\partial I_i}\tag{50,5}$$

将是新的变量，这里的导引函数仍是作用量，但表为坐标和 I_i 的函数；采用这些变量的运动方程

$$\dot{I}_i=0,\quad \dot{w}_i=\frac{\partial E(I)}{\partial I_i}$$

給出

$$I_i=\text{常数},\tag{50,6}$$

$$w_i=\frac{\partial E(I)}{\partial I_i}t+\text{常数},\tag{50,7}$$

用与(49,13)类似的計算，可知 w_i 变化 2π，即

$$\Delta w_i=2\pi\tag{50,8}$$

与相应的坐标 q_i 的整个("向前"和"向后")的变化对应。換句話說，量 $w_i(q,I)$ 是坐标的非單值函数，在坐标变化而回到初值时，

① 然而我們强調指出，这里所說的是坐标 q_i 在其值的許可区間内的形式上的变化，而不是指在一个实际运动的周期内坐标的变化（像一維运动的情况就是这样）。多自由度体系的有限运动在一般情况下，不仅整个不是周期运动，就是它的每个坐标随着时間的变化，都是非周期性的（見下面）。

它可能改变 2π 的任何整数倍。这个性質可像函数 $w_i(p, q)$(通过坐标和冲量来表达)在体系的相空間中的性質一样来定出。既然当通过变量 p 和 q 表示量 I_i 时，I_i 是 p 和 q 的單值函数，那末把 $I_i(p, q)$ 代入 $w_i(q, I)$，我們便得到函数 $w_i(p, q)$，在沿相空間内任何封閉曲綫轉时，$w_i(p, q)$ 可能改变 2π 的任何整数倍(或者零)。

由此可得出結論：体系状态的任何單值函数 $F(p, q)$ [1] 当通过正則变量来表达时，乃是角变量的周期函数，并且周期都是 2π。因此它可展成傅立叶重級数

$$F=\sum_{l_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{l_s=-\infty}^{\infty}A_{l_1, l_2\cdots l_s}e^{i(l_1w_1+l_2w_2+\cdots+l_sw_s)} \tag{50,9}$$

($l_1, l_2, \cdots, l_s$ 是整数)。把作为时間的函数的角变量代入此式可以發現 F 对时間的依賴关系由下面形式的和所确定：

$$F=\sum_{l_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{l_s=-\infty}^{\infty}A_{l_1, l_2\cdots l_s}\exp\left\{it\left(l_1\frac{\partial E}{\partial I_1}+\cdots+l_s\frac{\partial E}{\partial I_s}\right)\right\}。 \tag{50,10}$$

此和中的每一項都是以

$$l_1\frac{\partial E}{\partial I_1}+\cdots+l_s\frac{\partial E}{\partial I_s} \tag{50,11}$$

为頻率的时間的周期函数。然而，既然所有这些頻率一般說来并不是某一个頻率的整数(或有理分数)倍，那么整个和就不是严格的周期函数。特别說来，坐标 q 和冲量 p 本身就是如此。

由此可見，在一般情况下，体系的运动不但就整体而言不是严格周期性的，而且对任何一个坐标而言也不是严格周期性的。这就是說，如果体系經过了某一状态，那末体系經过任意長的有限时間都不会重新再經这个状态。然而可以肯定，經过足够長的时間后，

---

[1] 因为相差 2π 整数倍的 φ 值都对应于体系的同一状态，所以"轉动坐标"——角 φ (見 205 頁注)——和体系状态的关系是非單值的。因此，如果坐标 q 中有这样的角，則它們只以如像 $\cos\varphi$ 或 $\sin\varphi$ 的表示式包含在函数 $F(q, p)$ 中，而且这些表示式和体系状态的关系是單值的。

体系会无限接近于这个状态。由于这个性質，这种运动称为**条件周期运动**。

在許多特殊情况下，基本頻率 $\omega_i = \partial E/\partial I_i$ 中有两个(或更多个)是能够相約的(在 I_i 的值为任意的情况下)这时我們就說存在着**簡并**，而如果所有 s 个頻率都能相約，那末体系的运动叫做**完全簡并运动**。在后一种情况下，运动显然是严格的周期运动，因而所有粒子的軌道都是封閉的。

簡并的存在首先是減少了体系能量所依賴的独立量(I_i)的数目。設两个頻率 ω_1 和 ω_2 間的关系为

$$n_1 \frac{\partial E}{\partial I_1} = n_2 \frac{\partial E}{\partial I_2}, \tag{50,12}$$

式中 n_1 和 n_2 是整数。由此可得出結論：I_1 与 I_2 仅以 $n_2 I_1 + n_1 I_2$ 的形式包含在能量中。

單值积分的数目較之非簡并体系(自由度数相同)的一般情况下的数目有所增加是簡并运动很重要的特点。在非簡并的情况下，$(2s-1)$ 个运动积分中，共有 s 个体系的状态函数是單值的，比如說，它們的完全集合是 I_i。剩下的 $s-1$ 个积分可写成下列差的形式：

$$w_i \frac{\partial E}{\partial I_k} - w_k \frac{\partial E}{\partial I_i}。 \tag{50,13}$$

从公式(50, 7)可直接得到这些量不变的結論，但由于角变量是非單值的，它們不是体系状态的單值函数。

在存在簡并的情况下就不同了。例如，鑒于(50,12)，运动积分

$$w_1 n_1 - w_2 n_2 \tag{50,14}$$

虽是非單值的，然而它的非單值性仅仅在于增加 2π 的任意整数倍。因此为了要得到新的單值运动积分，只須取这些量的三角函数就够了。

在場 $U=-\alpha/r$ 中的运动(見本节習題)就是簡幷运动的一个例子。正是这个情况,使得除了通常的两个單值积分(我們認为运动是平面的)外,还出現新的,特别的單值运动积分,而两个通常的运动积分是矩 M 和能量 E,它們是在任何中心場里的运动所特有的。

我們也应当注意,附加單值积分的出現也可导出一个簡幷运动的特性:簡幷运动不只是在某一种[1]坐标选擇的情况下,而是在各种坐标选擇的情况下可完全分离变量。实际上,量 I_i 在可分离变量的坐标中是單值运动积分,然而当存在簡幷时,單值运动积分的数目超过 s,因此从中选取作为量 I_i 的那些运动积分就不是唯一的了。

我們仍用刻卜勒运动作为例子,它无論在球坐标中,还是在抛物線坐标中,都可分离变量。

在上节中曾指出,在一維有限运动的情况下,作用变量是絕热不变量。这个結論对于多自由度体系也是正确的。下面我們給出它在一般情况下的証明。

我們仍用 $\lambda(t)$ 表示变化緩慢的体系参量[2]。在进行由变量 p, q 到变量 I, w 的正則变換时,我們知道,导引函数是作用量 $S_0(q, I)$。它像依賴于参量一样依賴于量 λ。而如果 λ 依賴于时間,那末函数 $S_0(q, I; \lambda(t))$ 也将直接依賴于时間。这时新的哈密頓函数 H' 并不和相应的能量 E 相合,按正則变換的一般公式(45,8),我們有

$$H'=E(I)+\frac{\partial S_0}{\partial t}=E(I)+\Lambda\dot{\lambda},$$

[1] 这里我們撇开 $q_1'=q_1'(q_1)$, $q_2'=q_2'(q_2)$ 形式的坐标的簡單变换(即不認为經此种变換所就是另一种坐标选擇了——譯者注)。

[2] 为了公式的簡單起見,我們假定只有一个参量,但是这里的証明对于参量数目任意的情况都是有效的。

这里引入了記号
$$\Lambda=\left(\frac{\partial S_0}{\partial \lambda}\right)_I。$$
哈密頓方程現在給出
$$\dot{I}_i=-\frac{\partial H'}{\partial w_i}=-\frac{\partial \Lambda}{\partial w_i}\dot{\lambda}。\tag{50,15}$$

在一定的时間間隔内来平均这一等式，这个时間間隔大于体系的基本周期，但在这时間間隔内 λ 变化很小。因此在平均等式右边的时候，$\dot{\lambda}$ 可提到平均号的外边，而在平均 $\partial\Lambda/\partial w_i$ 时，我們認为体系的运动在 λ 数值不变的条件下进行，因而具有前面所講过的条件周期运动的性質。

作用量 S_0 是坐标的非單值函数，当坐标回到初值时，S_0 增加 $2\pi I_i$ 的整数倍。微商 $\Lambda=(\partial S_0/\partial\lambda)_I$ 却是單值函数，因为微分是在 I_i 之值不改变的条件下进行的，而在这个条件下 S_0 的增量消失。因此，表为角变量 w_i 的函数的 Λ 是周期函数。这函数的微商 $\partial\Lambda/\partial w_i$ 的平均值等于零；因此根据(50,15)可得
$$\frac{\overline{\partial I_i}}{\partial t}=-\overline{\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial w_i}\right)_I}\dot{\lambda}=0,$$
这就証明了量 I_i 的絕热不变性。

最后，关于在最一般情况下多(s 个)自由度封閉体系有限运动的性質作几点說明，这时不假定在哈密頓-雅可比方程中可能分离变量。

有可分离变量的体系的主要性質是运动积分 I_i 的單值性，I_i 的数目等于体系的自由度数。在一般的情况下，如果体系的变量不能分离，單值运动积分就限于那样一些量，它們的不变性反映了空間和时間的均匀性及各向同性，也就是說，單值运动积分是能量守恒定律，冲量守恒定律和冲量矩守恒定律。体系的相軌迹是在由給定的單值运动积分的常数值所决定的那些相空間的区域中。对于可分离变量的，有 s 个單值运动积分的体系，运动积分决定相

空間中一 s 維簇(多維曲面)。在足够長的时間内，体系的軌迹无限稠密地复盖在这个多維曲面上。

对于变量不能分离的，有較少的(在同样的 s 时)單值积分的体系，相軌迹在相空間内(完全或局部)充满維数較多的范围(簇)。

最后我們指出，如果哈密頓函数和可分离变量的函数間的差别仅仅是很小的項，那末运动的性質将接近于条件周期运动的性質，并且这种接近的程度，远远超过哈密頓函数中附加項小的程度。

習 題

試計算在場 $U=-\alpha/r$ 中之橢圓运动的作用变量。

解：在运动平面上的極坐标 r, φ 中有

$$I_\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_\varphi\, d\varphi=M,$$

$$I_r=\frac{2}{2\pi}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{M^2}{2}}\,dr=-M+\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|}}。$$

由此，以作用变量所表达的能量

$$E=-\frac{m\alpha^2}{2(I_r+I_\varphi)^2}。$$

它只依賴于 I_r+I_φ，这就意味着运动是簡并的，即两个基本频率(即 φ 和 r 改变的频率)相等。

根据公式 $$p=\frac{I_\varphi^2}{m\alpha},\ e^2=1-\left(\frac{I_\varphi}{I_\varphi+I_r}\right)^2,$$

通过 I_r 和 I_φ 来表达軌道参量 p 和 e [見(15,4)]。由于 I_r 和 I_φ 两个量的絕熱不变性，当系数 α 或質量 m 变化緩慢时，軌道的偏心率不变，而軌道的綫度和 m 及 α 成反比。

空間中一 s 維簇(多維曲面)。在足够長的时間內，体系的軌迹无限稠密地复盖在这个多維曲面上。

对于变量不能分离的，有較少的(在同样的 s 时)單值积分的体系，相軌迹在相空間內(完全或局部)充滿維数較多的范圍(簇)。

最后我們指出，如果哈密頓函数和可分离变量的函数間的差别仅仅是很小的項，那末运动的性質将接近于条件周期运动的性質，并且这种接近的程度，远远超过哈密頓函数中附加項小的程度。

習 題

試計算在場 $U=-\alpha/r$ 中之橢圓运动的作用变量。

解： 在运动平面上的極坐标 r, φ 中有

$$I_{\varphi}=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} p_{\varphi}\,d\varphi=M,$$

$$I_{r}=\frac{2}{2\pi}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{M^{2}}{2}}\,dr=-M+\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|}}。$$

由此，以作用变量所表达的能量

$$E=-\frac{m\alpha^{2}}{2(I_{r}+I_{\varphi})^{2}}。$$

它只依賴于 I_r+I_φ，这就意味着运动是簡并的，即两个基本频率(即 φ 和 r 改变的频率)相等。

根据公式 $$p=\frac{I_{\varphi}^{2}}{m\alpha},\quad e^{2}=1-\left(\frac{I_{\varphi}}{I_{\varphi}+I_{r}}\right)^{2},$$

通过 I_r 和 I_φ 来表达軌道参量 p 和 e [見(15,4)]。由于 I_r 和 I_φ 两个量的絕热不变性，当系数 α 或質量 m 变化緩慢时，軌道的偏心率不变，而軌道的綫度和 m 及 α 成反比。

空間中一 s 維簇(多維曲面)。在足够長的时間內,体系的軌迹无限稠密地复盖在这个多維曲面上。

对于变量不能分离的,有較少的(在同样的 s 时)單值积分的体系,相軌迹在相空間內(完全或局部)充满維数較多的范圍(簇)。

最后我們指出,如果哈密頓函数和可分离变量的函数間的差別仅仅是很小的項,那末运动的性質將接近于条件周期运动的性質,并且这种接近的程度,远远超过哈密頓函数中附加項小的程度。

習 題

試計算在場 $U=-\alpha/r$ 中之橢圓运动的作用变量。

解: 在运动平面上的極坐标 r, φ 中有

$$I_\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_\varphi\, d\varphi=M,$$

$$I_r=\frac{2}{2\pi}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{M^2}{2}}\,dr=-M+\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|}}。$$

由此,以作用变量所表达的能量

$$E=-\frac{m\alpha^2}{2(I_r+I_\varphi)^2}。$$

它只依賴于 I_r+I_φ,这就意味着运动是簡并的,即两个基本频率(即 φ 和 r 改变的频率)相等。

根据公式 $$p=\frac{I_\varphi^2}{m\alpha},\ e^2=1-\left(\frac{I_\varphi}{I_\varphi+I_r}\right)^2,$$

通过 I_r 和 I_φ 来表达軌道參量 p 和 e [見(15,4)]。由于 I_r 和 I_φ 两个量的絕热不变性,当系数 α 或質量 m 变化緩慢时,軌道的偏心率不变,而軌道的綫度和 m 及 α 成反比。

空間中一 s 維簇(多維曲面)。在足够長的时間內，体系的軌迹无限稠密地复盖在这个多維曲面上。

对于变量不能分离的，有較少的(在同样的 s 时)單值积分的体系，相軌迹在相空間內(完全或局部)充满維数較多的范圍(簇)。

最后我們指出，如果哈密頓函数和可分离变量的函数間的差别仅仅是很小的項，那末运动的性質将接近于条件周期运动的性質，并且这种接近的程度，远远超过哈密頓函数中附加項小的程度。

習 題

試計算在場 $U=-\alpha/r$ 中之橢圓运动的作用变量。

解： 在运动平面上的極坐标 r, φ 中有

$$I_\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_\varphi\,d\varphi=M,$$

$$I_r=\frac{2}{2\pi}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{M^2}{2}}\,dr=-M+\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|}}。$$

由此，以作用变量所表达的能量

$$E=-\frac{m\alpha^2}{2(I_r+I_\varphi)^2}。$$

它只依賴于 I_r+I_φ，这就意味着运动是簡并的，即两个基本频率(即 φ 和 r 改变的频率)相等。

根据公式 $$p=\frac{I_\varphi^2}{m\alpha},\ e^2=1-\left(\frac{I_\varphi}{I_\varphi+I_r}\right)^2,$$

通过 I_r 和 I_φ 来表达軌道参量 p 和 e [見(15,4)]。由于 I_r 和 I_φ 两个量的絕热不变性，当系数 α 或質量 m 变化緩慢时，軌道的偏心率不变，而軌道的綫度和 m 及 α 成反比。

空間中一 s 維簇(多維曲面)。在足够長的时間內，体系的軌迹无限稠密地复盖在这个多維曲面上。

对于变量不能分离的，有較少的(在同样的 s 时)單值积分的体系，相軌迹在相空間內(完全或局部)充滿維数較多的范圍(簇)。

最后我們指出，如果哈密頓函数和可分离变量的函数間的差别仅仅是很小的項，那末运动的性質将接近于条件周期运动的性質，并且这种接近的程度，远远超过哈密頓函数中附加項小的程度。

習　題

試計算在場 $U=-\alpha/r$ 中之橢圓运动的作用变量。

解：在运动平面上的極坐标 r，φ 中有

$$I_\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_\varphi\,d\varphi=M,$$

$$I_r=\frac{2}{2\pi}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{M^2}{2}}\,dr=-M+\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|}}。$$

由此，以作用变量所表达的能量

$$E=-\frac{m\alpha^2}{2(I_r+I_\varphi)^2}。$$

它只依賴于 I_r+I_φ，这就意味着运动是簡并的，即两个基本頻率(即 φ 和 r 改变的頻率)相等。

根据公式　　$p=\frac{I_\varphi^2}{m\alpha}$，$e^2=1-\left(\frac{I_\varphi}{I_\varphi+I_r}\right)^2$，

通过 I_r 和 I_φ 来表达軌道参量 p 和 e [見(15,4)]。由于 I_r 和 I_φ 两个量的絕熱不变性，当系数 α 或質量 m 变化緩慢时，軌道的偏心率不变，而軌道的綫度和 m 及 α 成反比。

空間中一 s 維簇(多維曲面)。在足够長的时間內，体系的軌迹无限稠密地复盖在这个多維曲面上。

对于变量不能分离的，有較少的(在同样的 s 时)單值积分的体系，相軌迹在相空間內(完全或局部)充滿維数較多的范圍(簇)。

最后我們指出，如果哈密頓函数和可分离变量的函数間的差別仅仅是很小的項，那末运动的性質將接近于条件周期运动的性質，并且这种接近的程度，远远超过哈密頓函数中附加項小的程度。

習 題

試計算在場 $U=-\alpha/r$ 中之橢圓运动的作用变量。

解：在运动平面上的極坐标 r, φ 中有

$$I_\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_\varphi\, d\varphi=M,$$

$$I_r=\frac{2}{2\pi}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{M^2}{2}}\,dr=-M+\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|}}。$$

由此，以作用变量所表达的能量

$$E=-\frac{m\alpha^2}{2(I_r+I_\varphi)^2}。$$

它只依賴于 I_r+I_φ，这就意味着运动是簡并的，即两个基本頻率(即 φ 和 r 改变的頻率)相等。

根据公式 $$p=\frac{I_\varphi^2}{m\alpha},\quad e^2=1-\left(\frac{I_\varphi}{I_\varphi+I_r}\right)^2,$$

通过 I_r 和 I_φ 来表达軌道参量 p 和 e [見(15,4)]。由于 I_r 和 I_φ 两个量的絕熱不变性，当系数 α 或質量 m 变化緩慢时，軌道的偏心率不变，而軌道的綫度和 m 及 α 成反比。

空間中一 s 維簇(多維曲面)。在足够長的时間內,体系的軌迹无限稠密地复盖在这个多維曲面上。

对于变量不能分离的,有較少的(在同样的 s 时)單值积分的体系,相軌迹在相空間内(完全或局部)充滿維数較多的范圍(簇)。

最后我們指出,如果哈密頓函数和可分离变量的函数間的差别仅仅是很小的項,那末运动的性質将接近于条件周期运动的性質,并且这种接近的程度,远远超过哈密頓函数中附加項小的程度。

習 題

試計算在場 $U=-\alpha/r$ 中之橢圓运动的作用变量。

解: 在运动平面上的極坐标 r, φ 中有

$$I_\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_\varphi\, d\varphi=M,$$

$$I_r=\frac{2}{2\pi}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{M^2}{2}}\,dr=-M+\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|}}。$$

由此,以作用变量所表达的能量

$$E=-\frac{m\alpha^2}{2(I_r+I_\varphi)^2}。$$

它只依賴于 I_r+I_φ,这就意味着运动是簡并的,即两个基本頻率(即 φ 和 r 改变的頻率)相等。

根据公式 $$p=\frac{I_\varphi^2}{m\alpha},\ e^2=1-\left(\frac{I_\varphi}{I_\varphi+I_r}\right)^2,$$

通过 I_r 和 I_φ 来表达軌道参量 p 和 e [見(15,4)]。由于 I_r 和 I_φ 两个量的絕热不变性,当系数 α 或質量 m 变化緩慢时,軌道的偏心率不变,而軌道的綫度和 m 及 α 成反比。

空間中一 s 維簇(多維曲面)。在足够長的时間內，体系的軌迹无限稠密地复盖在这个多維曲面上。

对于变量不能分离的，有較少的(在同样的 s 时)單值积分的体系，相軌迹在相空間內(完全或局部)充滿維数較多的范圍(簇)。

最后我們指出，如果哈密頓函数和可分离变量的函数間的差别仅仅是很小的項，那末运动的性質將接近于条件周期运动的性質，并且这种接近的程度，远远超过哈密頓函数中附加項小的程度。

習 題

試計算在場 $U=-\alpha/r$ 中之橢圓运动的作用变量。

解：在运动平面上的極坐标 r, φ 中有

$$I_\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_\varphi\, d\varphi=M,$$

$$I_r=\frac{2}{2\pi}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{M^2}{2}}\, dr=-M+\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|}}。$$

由此，以作用变量所表达的能量

$$E=-\frac{m\alpha^2}{2(I_r+I_\varphi)^2}。$$

它只依賴于 I_r+I_φ，这就意味着运动是簡并的，即两个基本頻率(即 φ 和 r 改变的頻率)相等。

根据公式 $$p=\frac{I_\varphi^2}{m\alpha},\ e^2=1-\left(\frac{I_\varphi}{I_\varphi+I_r}\right)^2,$$

通过 I_r 和 I_φ 来表达軌道參量 p 和 e [見(15,4)]。由于 I_r 和 I_φ 两个量的絕热不变性，当系数 α 或質量 m 变化緩慢时，軌道的偏心率不变，而軌道的綫度和 m 及 α 成反比。

空間中一 s 維簇(多維曲面)。在足够長的时間內,体系的軌迹无限稠密地复盖在这个多維曲面上。

对于变量不能分离的,有較少的(在同样的 s 时)單值积分的体系,相軌迹在相空間內(完全或局部)充滿維数較多的范圍(簇)。

最后我們指出,如果哈密頓函数和可分离变量的函数間的差别仅仅是很小的項,那末运动的性質将接近于条件周期运动的性質,并且这种接近的程度,远远超过哈密頓函数中附加項小的程度。

習 題

試計算在場 $U=-\alpha/r$ 中之橢圓运动的作用变量。

解: 在运动平面上的極坐标 r, φ 中有

$$I_\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_\varphi\, d\varphi=M,$$

$$I_r=\frac{2}{2\pi}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{M^2}{2}}\,dr=-M+\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|}}。$$

由此,以作用变量所表达的能量

$$E=-\frac{m\alpha^2}{2(I_r+I_\varphi)^2}。$$

它只依賴于 I_r+I_φ,这就意味着运动是簡并的,即两个基本頻率(即 φ 和 r 改变的頻率)相等。

根据公式 $$p=\frac{I_\varphi^2}{m\alpha},\quad e^2=1-\left(\frac{I_\varphi}{I_\varphi+I_r}\right)^2,$$

通过 I_r 和 I_φ 来表达軌道参量 p 和 e [見(15,4)]。由于 I_r 和 I_φ 两个量的絕热不变性,当系数 α 或質量 m 变化緩慢时,軌道的偏心率不变,而軌道的綫度和 m 及 α 成反比。

空間中一 s 維簇(多維曲面)。在足够長的时間內,体系的軌迹无限稠密地复盖在这个多維曲面上。

对于变量不能分离的,有較少的(在同样的 s 时)單值积分的体系,相軌迹在相空間內(完全或局部)充满維数較多的范圍(簇)。

最后我們指出,如果哈密頓函数和可分离变量的函数間的差別仅仅是很小的項,那末运动的性質将接近于条件周期运动的性質,并且这种接近的程度,远远超过哈密頓函数中附加項小的程度。

習 題

試計算在場 $U=-\alpha/r$ 中之橢圓运动的作用变量。

解:在运动平面上的極坐标 r, φ 中有

$$I_\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_\varphi\, d\varphi=M,$$

$$I_r=\frac{2}{2\pi}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{M^2}{2}}\,dr=-M+\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|}}。$$

由此,以作用变量所表达的能量

$$E=-\frac{m\alpha^2}{2(I_r+I_\varphi)^2}。$$

它只依賴于 I_r+I_φ,这就意味着运动是簡并的,即两个基本频率(即 φ 和 r 改变的频率)相等。

根据公式 $$p=\frac{I_\varphi^2}{m\alpha},\ e^2=1-\left(\frac{I_\varphi}{I_\varphi+I_r}\right)^2,$$

通过 I_r 和 I_φ 来表达軌道参量 p 和 e [見(15,4)]。由于 I_r 和 I_φ 两个量的絕热不变性,当系数 α 或質量 m 变化緩慢时,軌道的偏心率不变,而軌道的綫度和 m 及 α 成反比。

空間中一 s 維簇(多維曲面)。在足够長的时間内,体系的軌迹无限稠密地复盖在这个多維曲面上。

对于变量不能分离的,有較少的(在同样的 s 时)單值积分的体系,相軌迹在相空間内(完全或局部)充滿維数較多的范围(簇)。

最后我們指出,如果哈密頓函数和可分离变量的函数間的差别仅仅是很小的項,那末运动的性質將接近于条件周期运动的性質,并且这种接近的程度,远远超过哈密頓函数中附加項小的程度。

習 題

試計算在場 $U=-\alpha/r$ 中之橢圓运动的作用变量。

解: 在运动平面上的極坐标 r, φ 中有

$$I_\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_\varphi\,d\varphi=M,$$

$$I_r=\frac{2}{2\pi}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{M^2}{2}}\,dr=-M+\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|}}。$$

由此,以作用变量所表达的能量

$$E=-\frac{m\alpha^2}{2(I_r+I_\varphi)^2}。$$

它只依賴于 I_r+I_φ,这就意味着运动是簡并的,即两个基本頻率(即 φ 和 r 改变的頻率)相等。

根据公式 $$p=\frac{I_\varphi^2}{m\alpha},\ e^2=1-\left(\frac{I_\varphi}{I_\varphi+I_r}\right)^2,$$

通过 I_r 和 I_φ 来表达軌道参量 p 和 e [見(15,4)]。由于 I_r 和 I_φ 两个量的絕热不变性,当系数 α 或質量 m 变化緩慢时,軌道的偏心率不变,而軌道的綫度和 m 及 α 成反比。